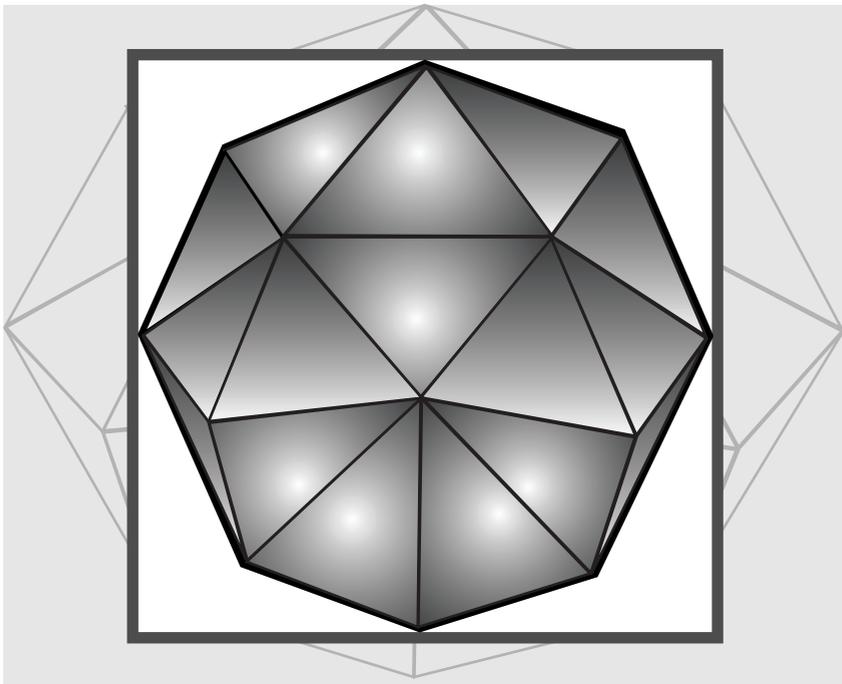


# **HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (V)**



# **HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (V)**



**A.H.E.P.E.**

**EDICIÓN**

José María Riobóo Almanzor  
*Universidad de Santiago de Compostela*

Irene Riobóo Lestón  
*Universidad Rey Juan Carlos*

**HISTORIA DE LA PROBABILIDAD  
Y LA ESTADÍSTICA (V)**  
por A.H.E.P.E.

**Diseño de cubierta** Miguel A. Suárez  
**Maquetación:** Miguel A. Suárez  
**Impresión y edición:** Nino-Centro de Impresión Digital  
Rosalia de Castro, 58  
Santiago de Compostela

© 2011 A.H.E.P.E.

Reservados todos los derechos. De acuerdo con la legislación vigente podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujeran o plagiaran, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte sin la preceptiva autorización. Ninguna de las partes de esta publicación, incluido el diseño de cubierta, puede ser reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea electrónico, químico, mecánico, magneto-optico, grabación, fotocopia o cualquier otro, sin la previa autorización escrita por parte de la editorial.

ISBN: 978-84-938774-9-1

Depósito Legal: C 1763-2011

# Prólogo

---

**E**n este volumen se recopilan todas las ponencias presentadas al *V CONGRESO INTERNACIONAL DE HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA Y DE LA PROBABILIDAD* que fueron organizadas por la Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España (AHEPE), junto con la Universidad de Santiago de Compostela, la Universidad Rey Juan Carlos de Madrid y la Universidad de Castilla–La Mancha, y que se celebraron los días 17 y 18 de septiembre de 2009, en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Santiago de Compostela.

Se cumple una década desde que iniciáramos la vida social de AHEPE y, salvando todas las dificultades, hemos sido fieles a nuestra cita bianual. Son cinco los Congresos y cinco los volúmenes donde se recogen todas las ponencias y comunicaciones presentadas. En éste se incluyen muy variadas aportaciones sobre la Historia de la Estadística y de la Probabilidad.

Las ponencias invitadas fueron:

- ***Marc Barbut y Jacques Veron***  
Existe-t-il une limite à la vie humaine? La controverse Vincent-Gumbel et l'arbitrage de Fréchet (1937-1951).
- ***Ernesto Azorín***  
La influencia de Eurostat en el desarrollo del Sistema Estadístico Europeo.
- ***Thierry Martin***  
Les doutes sur les bases du calcul des Probabilités de Louis-Frederic Ancillon.

Y las veintitrés comunicaciones correspondientes a los más variados aspectos de nuestra temática histórica fueron:

- ***José María Arribas Macho***  
La introducción de la Estadística en las Ciencias Sociales: Estados Unidos 1920-1945).
- ***Jean Pierre Beaud***  
Percentage: emergence, migrations, and routinization in the Political Sciences from the seventeenth to the nineteenth century.

- **Ramón Jiménez Toribio y Juan José García del Hoyo**  
Orígenes y evolución de la teoría de la cointegración y del análisis de la transmisión de precios en mercados.
- **Cristina Sánchez Figueroa, Pedro Cortiñas Vázquez e Iñigo Tejera Martín**  
La prueba de hipótesis: Las tendencias de Fisher y Neyman-Pearson.
- **David Castilla Espino y Juan José García del Hoyo**  
El análisis de fronteras estocásticas: Orígenes y desarrollo.
- **Miguel Ángel Gómez Villegas**  
Cómo la aproximación Bayesiana a la Inferencia pasó a ser frecuentista.
- **José Antonio Camúñez Ruiz, Jesús Basulto Santos y Francisco Javier Ortega Irizo**  
La Comisión Civile (1835): Un debate temprano sobre el uso médico de la Estadística.
- **Juan Ignacio Casal Lino**  
Estadística: Información para organización y conocimiento de los Estados.
- **Guido Ferrari**  
Consumer Price Indexes (CPIs) in Time and Space: an Historical-Systematic Overview.
- **Irene Riobóo Lestón**  
Los índices de precios del comercio exterior en España: Una revisión histórica.
- **Ariel Zimmerman**  
The introduction of quantification and Biostatistics to the clinical practice – The case of clinical epidemiology and evidence-based medicine.
- **José Luis Alfaro Navarro, M<sup>a</sup> Leticia Meseguer Santamaría, José Mondéjar Jiménez y Manuel Vargas Vargas**  
Los inicios de la aritmética política en la Inglaterra del siglo XVII.
- **Sonia de Paz Cobo y Juan Manuel López Zafra**  
Aportaciones metodológicas de la Estadística.
- **M<sup>a</sup> Carmen Escribano Ródenas y Gabriela M. Fernández Barberis**  
Reflexiones sobre la introducción de la Estadística en la Economía española.
- **Jesús Basulto Santos, José Javier Busto Guerrero y Rocío Sánchez Lissen**  
El concepto de desigualdad en Wilfredo Pareto (1848-1923).
- **Francisco Javier Martín Pliego y Jesús Santos del Cerro**  
La génesis del primer tratado moderno sobre Probabilidad en España.
- **M<sup>a</sup> Carmen Escribano Ródenas y Ana Isabel Busto Caballero**  
En homenaje al Profesor Sixto Ríos García.

- **Mary Sol de Mora Charles**  
Leibniz y el cálculo de los "partis".
- **Gregoria Mateos Aparicio-Morales**  
Los modelos de ecuaciones estructurales: Una visión histórica sobre sus orígenes y desarrollo.
- **Antonio Franco Rodríguez de Lázaro, M<sup>a</sup> Carmen Escribano Ródenas y Mercedes Casas Guillén**  
La comunidad científica de Ginebra siglo XVIII: Estudio de la Probabilidad en el Cours de Logique de Gabriel Cramer.
- **Gabriel Ruiz Garzón y Manuel Arana Jiménez**  
Programación matemática: Aspectos históricos.
- **Antonio Hernández Moreno**  
Visión histórica sobre el control estadístico de revelación. Un panorama sobre la estadística pública.
- **Gema Fernández-Avilés, José María Montero, Jorge Mateu y Emilio Porcu**  
Geoestadística espacial y espacio-temporal: vino nuevo, cepas viejas.

El volumen recoge aportaciones para la Historia de la Probabilidad en sus inicios, unos pioneros trabajos para ir dotando de cuerpo a la Historia de la Probabilidad en España, otros que marcan la importancia de la Estadística en sus relaciones con la Economía y la Sociología, y otros relativos a la génesis de la Estadística Oficial y a la organización de la enseñanza de la Estadística. Participaron ponentes de seis países.

Por último, debemos de reseñar que el programa de actos sociales que preparó el comité organizador local tuvo una gran acogida siendo del beneplácito de todos los asistentes.

F. Javier Martín-Pliego López

Presidente de AHEPE

Madrid, Mayo de 2011



# Contenido

---

## CAPÍTULO 1 .

<b>Los inicios de la aritmética política en la Inglaterra del siglo XVII .....</b>	<b>1</b>
Introducción.....	1
Petty y el análisis cuantitativo como metodología de estudio de la economía política.....	3
Conclusiones .....	8
Bibliografía.....	9

## CAPÍTULO 2 .

<b>La introducción de la Estadística en las Ciencias Sociales: Estados Unidos (1920-1945).....</b>	<b>11</b>
Introducción.....	11
Aplicaciones e instituciones estadísticas .....	14
El caso de la Sociología.....	21
Conclusiones .....	24
Bibliografía.....	25

## CAPÍTULO 3 .

<b>Existe-t-il une limite à la vie humaine ? La controverse Vincent-Gumbel et l'arbitrage de Fréchet (1937-1951).....</b>	<b>27</b>
Emil Julius Gumbel et <i>La durée extrême de la vie humaine</i> .....	28
Paul Vincent: une critique radicale de l'approche de Gumbel .....	39
Maurice Fréchet entre en scène (lettre du 27 novembre 1950) .....	42
Trois scientifiques, trois styles .....	44
Références .....	46

## CAPÍTULO 4 .

<b>El concepto de desigualdad en Vilfredo Pareto (1848-1923) .....</b>	<b>47</b>
Introducción.....	47
Perfil biográfico de V. Pareto .....	48
El concepto de desigualdad en Vilfredo Pareto.....	52
La ley del reparto de las rentas de V. Pareto .....	58

Consecuencias económicas de la ley de Pareto .....	64
Consecuencias del criterio de desigualdad propuesto por Pareto .....	69
Ejemplos ilustrativos de la ley de Pareto tipo II .....	73
Bibliografía .....	76

## CAPÍTULO 5 .

<b>Percentage: Emergence, migrations, and routinization in the political sciences from the seventeenth to the nineteenth century .....</b>	<b>77</b>
Proportions and percentages in the times of the early political arithmeticians .....	78
Percentages and proportions in British North America .....	82
The first English censuses and the question of evolution of the population..	85
A milestone in the foundation of statistical objectivism .....	89
References .....	91

## CAPÍTULO 6 .

<b>La comisión civiale (1835): Un debate temprano sobre el uso médico de la Estadística .....</b>	<b>93</b>
Jean Civiale, la litotomía y la litotricia .....	93
La comisión .....	97
La primera parte de la memoria .....	99
La segunda parte .....	101
Conclusiones .....	104
Bibliografía .....	105

## CAPÍTULO 7 .

<b>Estadística: Información para Organización y conocimiento de los Estados.....</b>	<b>107</b>
Introducción.....	107
Principios de organización de la Sociedad .....	109
Proceso-progreso de la Organización Estadística.....	110
La Probabilidad, medida del azar-aleatoriedad. ....	113
Tratado teórico-practico de Estadística. (Maurice Block).....	114
El gran desarrollo: Información, Informática, Utilidad y Decisión. ....	117
El objetivo final: Información, Informática, y organización de la Sociedad.	
La Estadística.....	118
Bibliografía.....	119

**CAPÍTULO 8 .**

<b>El análisis de fronteras estocásticas: Orígenes y primeros pasos.....</b>	<b>121</b>
Introducción.....	121
Eficiencia económica y antecedentes metodológicos del Análisis de Fronteras Estocásticas .....	122
Origen del Análisis de Fronteras Estocásticas.....	124
Primeros pasos del Análisis de Fronteras Estocásticas.....	126
Impacto científico.....	128
Últimas aportaciones .....	130
Conclusiones .....	131
Bibliografía.....	132

**CAPÍTULO 9 .**

<b>En Homenaje al Profesor Sixto Ríos García .....</b>	<b>137</b>
Resumen .....	137
Introducción.....	138
Pinceladas biográficas .....	138
Rasgos relevantes de la obra científica del profesor Ríos García.....	146
Conclusiones .....	148
Bibliografía.....	150

**CAPÍTULO 10 .**

<b>Reflexiones sobre la introducción de la Estadística en la Economía Española .....</b>	<b>151</b>
Introducción.....	151
Antecedentes.....	152
La Estadística Económica de Madoz.....	156
Cátedras de Estadística .....	158
Conclusiones .....	160
Bibliografía.....	161

**CAPÍTULO 11 .**

<b>Geoestadística espacial y espacio-temporal: vino nuevo, cepas viejas. ....</b>	<b>163</b>
Introducción.....	163
Covarianza espacio-temporal: piedra angular de la geoestadística moderna	166
De los teoremas del siglo XX a funciones de covarianza de nuestros días ...	170
Conclusiones .....	174
Anexo .....	174
Bibliografía.....	175

**CAPÍTULO 12 .**

<b>Consumer Price Indexes (CPIs) in Time and Space: an Historical-Systematic Overview .....</b>	<b>179</b>
Introduction .....	179
The TCPI: methodological features and historical path .....	181
The elaboration of the TCPI in Italy and in the EU, with a look to the US...	188
The development of the PPPs .....	192
Conclusion .....	202
References .....	203

**CAPÍTULO 13 .**

<b>La comunidad científica de Ginebra del siglo XVIII: Estudio de la probabilidad en el <i>Cours de Logique</i> de Gabriel Cramer .....</b>	<b>209</b>
Introducción.....	209
Ginebra, centro cultural y científico del siglo XVIII.....	210
Biografía de Gabriel Cramer .....	213
Contribuciones científicas de Gabriel Cramer.....	216
Conclusiones .....	221
Bibliografía.....	222

**CAPÍTULO 14 .**

<b>Cómo la aproximación Bayesiana a la Inferencia pasó a ser frecuentista .....</b>	<b>225</b>
Las figuras de Karl Pearson, Fisher, Neyman, y Egon Pearson .....	228
El renacimiento bayesiano.....	231
Agradecimientos.....	234
Bibliografía.....	234

**CAPÍTULO 15 .**

<b>Visión histórica sobre el control estadístico de revelación. Un panorama sobre la estadística pública.....</b>	<b>237</b>
Introducción.....	237
Impacto analítico técnicas SDC.....	240
Técnicas SDC aplicadas a microdatos.....	242
Técnicas SDC aplicadas a tablas agregadas .....	244
Soluciones computacionales.....	245
Conclusiones .....	246
Bibliografía.....	247

**CAPÍTULO 16 .**

<b>Orígenes y evolución de la teoría de la cointegración y del análisis de la transmisión de precios en mercados .....</b>	<b>249</b>
Introducción.....	249
Origen y desarrollo de la teoría de la cointegración.....	250
Teoría de la Cointegración y análisis de mercados .....	257
Un campo de aplicación de la cointegración: análisis de los mercados pesqueros .....	259
Conclusiones .....	260
Bibliografía.....	261

**CAPÍTULO 17 .**

<b>Les Doutes sur les bases du calcul des probabilités de Louis-Frédéric Ancillon.....</b>	<b>263</b>
Introduction .....	263
Vie et œuvre de Louis-Frédéric Ancillon .....	265
L'interprétation ancillonienne des probabilités .....	267
Critique du projet d'évaluation numérique de la probabilité.....	271
Conclusion.....	275
Bibliographie .....	276

**CAPÍTULO 18 .**

<b>La génesis del primer tratado moderno sobre Probabilidad en España .....</b>	<b>279</b>
Introducción.....	279
Entorno político y social.....	280
Aspectos biográficos de Diego Ollero.....	282
Análisis del <i>Tratado de Cálculo de Probabilidades</i> .....	284
Bibliografía.....	288

**CAPÍTULO 19 .**

<b>Los modelos de ecuaciones estructurales: Una revisión histórica sobre sus orígenes y desarrollo .....</b>	<b>289</b>
Introducción.....	289
Una revisión sobre la necesidad de los modelos de ecuaciones estructurales.....	290
Las líneas de investigación que han dado lugar a SEM: desde principios del siglo XX hasta 1970 .....	291
El inicio de los modelos de ecuaciones estructurales: Jöreskog y su modelo de ecuaciones estructurales basado en covarianzas.....	294

La evolución de los modelos de ecuaciones estructurales hacia un enfoque más flexible: El modelo PLS-Path Modeling .....	297
Bibliografía.....	298

**CAPÍTULO 20 .**

<b>Leibniz y el cálculo de los "partis" .....</b>	<b>303</b>
De los números en las tiradas de dados, que me propuso el duque de Roannez .....	304
Juego de (Kinkenove, Cinquenove) Quinquenove .....	310
Estimación de la incertidumbre .....	317
Bibliografía.....	318

**CAPÍTULO 21 .**

<b>Aportaciones metodológicas de la Estadística.....</b>	<b>321</b>
Introducción.....	321
Primera parte. De las definiciones de Estadística y su relación con la investigación.....	322
Segunda parte. Estadística y Método Científico.....	323
Tercera parte. Estadística y Método en Economía .....	326
Conclusiones .....	327
Bibliografía.....	327

**CAPÍTULO 22 .**

<b>Los índices de precios del comercio exterior en España: Una revisión histórica .....</b>	<b>329</b>
Introducción.....	329
Evolución metodológica.....	330
Metodología actual .....	340
Bibliografía.....	343

**CAPÍTULO 23 .**

<b>Programación matemática: Aspectos históricos .....</b>	<b>345</b>
Resumen .....	345
La condición de Lagrange y otros antecedentes mecánicos .....	346
Teoremas de la Alternativa.....	348
Condiciones de optimalidad .....	349
Programación Matemática e Investigación Operativa.....	351
El óptimo de una función multiobjetivo .....	353
Convexidad generalizada.....	354
Bibliografía.....	356

**CAPÍTULO 24 .**

<b>La prueba de hipótesis: Las tendencias de Fisher y Neyman–Pearson ..</b>	<b>357</b>
Antecedentes.....	358
Fisher y Las Pruebas de Significación.....	359
Neyman y Pearson las llamadas <i>Prueba de hipótesis</i> .....	360
Controversia entre Fisher y Neyman-Pearson.....	362
Conclusión: El método combinado que se utiliza en la actualidad. ....	363
Bibliografía.....	364

**CAPÍTULO 25 .**

<b>The introduction of quantification and Biostatistics to the clinical practice – The case of clinical epidemiology and evidence-based medicine.....</b>	<b>365</b>
John Rodman Paul (1893-1971) – The ecology of disease .....	367
Alvan Feinstein (1925-2001) - Clinometrics.....	370
Conclusion – Clinical Epidemiology and Evidence-Based Medicine.....	373
References .....	374



## CAPÍTULO 1

# Los inicios de la aritmética política en la Inglaterra del siglo XVII

JOSÉ LUIS ALFARO NAVARRO  
M<sup>a</sup> LETICIA MESEGUER SANTAMARÍA  
JOSÉ MONDÉJAR JIMÉNEZ  
MANUEL VARGAS VARGAS  
Universidad de Castilla-La Mancha

### Introducción

A lo largo del siglo XVII se empieza a introducir en Inglaterra el pensamiento cuantitativo para abordar cuestiones económicas y sociales. No se trata de un hecho anecdótico o fortuito, sino que estuvo propiciado por una serie de circunstancias que facilitaron su aparición y condicionaron sus primeros desarrollos. Los cambios sociales, filosóficos y culturales ocurridos en Europa desde finales del siglo XV desembocan en un tipo nuevo de relaciones sociales y económicas que favorecieron la utilización de estadísticas como un nuevo enfoque de análisis de la sociedad muy útil para las nuevas necesidades del Estado.

Por un lado, la expansión del comercio ocasionó la aparición de una nueva clase social, cada vez más rica y poderosa, la burguesía mercantil. Con el paso del tiempo, la acumulación de capital y la necesidad de estabilizar la producción de manufacturas, provocaron una concentración creciente de la actividad productiva y el desarrollo de un nuevo agente económico que controlaba el suministro de

materias primas, los medios de producción y los canales de distribución, por lo que sólo necesitaba de mano de obra para desarrollar su actividad. Surgía así otra nueva clase social, el proletariado, y la necesidad de reestructurar la organización social y política.

Junto a este cambio económico se desarrollan los Estados nacionales y, con ellos, una visión alejada de la escolástica y la dimensión moral de la economía. Los intereses económicos del monarca centran la atención de un nuevo grupo de pensadores, que buscan el aumento de la riqueza (generalmente en metales preciosos) del rey como fundamento de su poder y fundamentan la intervención del Estado en la economía para regular su funcionamiento. Es la época del mercantilismo.

Estos cambios también se reflejan en una nueva forma de pensar la economía. En primer lugar, se abandona el ámbito familiar de ésta, arrastrado desde la noción aristotélica, para darle una dimensión social y pública; es decir, se empieza a pensar en economía *política*. Por otro lado, el debate sobre temas económicos abandona el ámbito de la filosofía moral, predominante en el pensamiento escolástico de los siglos anteriores, para buscar un nuevo tipo de fundamentación que responde a otros intereses y, sobre todo, a otras pautas metodológicas, más acordes con la ciencia de la época. Por un lado, la concepción individualista de la vida pública ocasionó, sobre todo en Inglaterra, una progresiva liberalización económica, eliminando paulatinamente muchas de las reglamentaciones económicas y aumentando la competencia. Por otro lado, el empirismo de Francis Bacon (1561-1626) centró la atención de los pensadores, sobre todo ingleses, en la experimentación, trasladando el método de investigación de las ciencias naturales a las humanas y sociales.

El método inductivo propuesto por Bacon asume la existencia de *leyes naturales*, principios que rigen el comportamiento de los fenómenos naturales y que son asequibles al entendimiento humano a través de su formulación matemática. Sin embargo, se opone al deductivismo al situar el origen del conocimiento en la experiencia, única fuente que permite descubrir la *ley universal* que subyace en los hechos de la misma naturaleza. Por ello, no se trata de un empirismo puro, sino de un proceso inferencial que permite el enunciado de principios generales o teorías sobre los fenómenos observados. Este enfoque, conocido también como método científico, debe iniciarse con una etapa de observación, establecimiento de conceptos *observables* y la clasificación de la base experimental. Sólo entonces se podrán inferir las teorías explicativas y contrastarlas empíricamente.

Los trabajos de Copérnico (1473-1543), Bruno (1548-1600), Galileo (1564-1642), Kepler (1571-1630) y, sobre todo, Newton (1642-1727) revolucionan las ciencias naturales y ensalzan los méritos del método inductivo. Se establecen *verdades científicas*, expresadas cuantitativamente mediante modelos matemáticos,

fundadas en la experiencia y de carácter acumulativo, lo que da origen al *progreso científico*.

El éxito del método inductivo hacía casi inevitable su generalización y aplicación al estudio de problemas relacionados con el hombre y su actividad social. Surgen entonces las aportaciones de Petty (1623-1687) y su *aritmética política*, Graunt (1620-1674), cuyos estudios son considerados como el inicio de la demografía, Fleetwood (1656-1723) y su estudio de la evolución de los precios mediante índices, King (1648-1712), con su cálculo de la renta nacional y la relación entre el precio del trigo y la cantidad vendida o Davenant (1656-1714), que continúa, recoge y formaliza aportaciones de Petty y King.

La actividad recaudatoria del Estado, las transacciones del comercio exterior, la aparición de la balanza comercial o las necesidades de conocimiento de la población ocasionaron la necesidad de recolectar y estimar datos para fines estatales. Pero la actividad cuantitativa de la época no se limitó al recuento sino que, producto de la filosofía mecanicista y del enfoque baconiano, también desarrolló conceptos y métodos de investigación novedosos, constituyendo el germen de disciplinas como la aritmética política o la demografía, como se refleja en las obras de los dos pensadores más relevantes de esta corriente, William Petty y John Graunt.

En este trabajo, nos centraremos básicamente en sus aportaciones. El objetivo no es tanto presentarlas como destacar la concepción cuantitativa que subyace en ellas y su importancia para el desarrollo de las futuras ciencias sociales.

## **Petty y el análisis cuantitativo como metodología de estudio de la economía política**

Sir William Petty, en el prefacio de su obra *Political Arithmetick* propone un nuevo enfoque para abordar las cuestiones económicas de su tiempo: “...en lugar de utilizar solo comparativos y superlativos y argumentos intelectuales, yo me he propuesto expresarme en términos de números, pesos y medidas, usar solo argumentos que tengan sentido y considerar únicamente las causas que estén visiblemente basadas en la naturaleza, abandonando la consideración de todos aquellos que dependen de la naturaleza mutable de las mentes, las opiniones, los apetitos y las pasiones de hombres particulares”, (Petty, 1691). La justificación para la obtención de datos es siempre la interpretación de la realidad en términos cuantitativos, es decir, en conceptos cuantificables que tengan su origen en la observación, no en principios filosóficos o metafísicos.

Sin embargo, dada la escasez de información cuantitativa en el siglo XVII, el primer paso del método de Petty ha de ser, necesariamente, la recolección de estadísticas. Pero ya el mismo proceso de obtención está dirigido por un marco

estructural previo, basado en un “*cuero social*”, que determina qué se mide y cómo se interpreta el resultado: es la denominada “*Anatomía Política*”. De hecho, sus cálculos estadísticos suponen, en la mayoría de los casos, un compendio de métodos abreviados para inferir de forma aproximada los valores a los que no puede acceder por observación, métodos que dependen del “marco conceptual” y que apenas hacen uso de *técnicas estadísticas*. El objetivo de Petty es dar una interpretación selectiva del mundo económico, destacando las características esenciales de su funcionamiento.

Se produce así la primera gran diferencia con el método lógico-deductivo heredado de la Escolástica: los conceptos utilizados tienen su origen en la observación o son perfectamente cuantificables, prescindiendo de aquéllos que no tengan una contrapartida empírica asequible. Sin embargo, no se trata de empirismo puro, ya que se establece un marco teórico que conforma las relaciones entre los conceptos y su interpretación en el *cuero* general del funcionamiento de la economía. Por ello, y por sus esfuerzos en la cuantificación de magnitudes económicas, Petty puede ser considerado como un precursor de la contabilidad nacional.

La segunda gran diferencia es el criterio de validez de los enunciados. Siguiendo la lógica baconiana, éstos deben ser contrastables con la evidencia empírica, fuente de significación de los conceptos. Así pues, las *teorías*, que no son otra cosa que el marco relacional de los conceptos, quedan validadas o refutadas según su concordancia con la realidad.

La percepción de Petty de los temas económicos está marcada por la ausencia de un interés mercantil por su parte y por su amistad con hombres destacados del acontecer científico. Sus trabajos se centran en cuestiones prácticas de la Inglaterra de la época como la tributación, la moneda, el nivel de empleo, la política o el comercio exterior. El método se centra en reunir los elementos esenciales del problema práctico que buscaba resolver, más que para construir una descripción perfecta de la realidad. Por ello, no desarrolló una teoría económica consistente, sino que utilizó datos cuantitativos para crear conceptos como el de la velocidad de la moneda, renta nacional y otros, con los que aprehender el funcionamiento básico del “cuero económico”, realizando estudios sobre la actividad productiva de la época, con contabilizaciones de las actividades mineras, manufactureras, agrícolas, pastoriles y de pesca, desde la materia prima hasta el producto final. Sus aportaciones quedan recogidas en cinco obras: “*A Treatise of Taxes and Contributions*” (1662), “*Political Anatomy of Ireland*” (1672), “*Verbum Sapienti*” (1691), publicado como un suplemento de la obra anterior, “*Political Arithmetik*” (1672) y “*Quantulumcunque Concerning Money*” (1682), todas ellas recogidas en la edición de Hull (1899). En las primeras obras aún aparecen restos de ideas mercantilistas, pero en sus obras posteriores, particularmente en “*Quantulumcunque Concerning Money*”, desaparecen y Petty pasa a centrarse en

los procesos de producción, aplicando su método importado de las ciencias naturales y complementándolo con la recopilación de estadísticas.

La influencia que Hobbes ejerce sobre su forma de pensar hace que sea un defensor férreo de la soberanía del Estado, mostrando un gran interés por cuestiones relacionadas con la financiación pública vinculándose a través del estudio de las finanzas estatales con los problemas económicos de la sociedad. Así, no es de extrañar el rigor con el que Petty trata los impuestos. Fue el primer economista que se declaró a su favor, al considerarlos beneficiosos para la sociedad, poniendo especial énfasis en su carácter redistributivo hacia los productores desde aquellos súbditos que no los eran. Establece, anticipándose a Adam Smith, las condiciones a que debe ajustarse un buen impuesto: proporcionalidad, claridad, comodidad y economía. Considera a los impuestos como el tributo se hace para contribuir a los gastos del estado y como contrapartida a la protección de la propiedad del contribuyente, siguiendo la filosofía hobbesiana, pero defiende que, bien gestionados, estimulan la industria y el comercio. Por ello, considera que éstos no deben alterar la distribución de la riqueza y ser proporcionales para todos, lo que le lleva a la necesidad de contar con una base estadística que establezca la carga fiscal de cada ciudadano, que enmarca en el concepto de *renta nacional*, aunque no desarrolla una teoría sobre su determinación ni intenta medir sus cambios. Lo que sí hace es estimar que los impuestos suponen el 10% de dicha renta nacional, criterio que utiliza para fijar la carga fiscal. Así, como opina que los impuestos deberían fijarse sobre la tierra, las existencias y los hombres, considerados independientemente de sus bienes, deduce que los trabajadores están sometidos a menos impuestos de los necesarios, ya que no alcanzan el 10% de su trabajo, por lo que deberían trabajar más y gastar menos, ambas en un 20%.

Pero, siguiendo esta línea cuantitativa, necesita convertir el trabajo, la tierra y los bienes producidos, en dinero, por lo que se ve impelido a desarrollar una teoría del valor. Para Petty, el trabajo era el padre y principio de la riqueza, mientras que la madre era la tierra. Considera igualmente que la riqueza de la nación es producto del trabajo acumulado anterior y de una estructura social donde el trabajo está dividido. Consecuentemente, propone medir el valor en base al trabajo, no como la cantidad de trabajo realizada en un día (de difícil cuantificación y comparación), sino “...*la cantidad de alimentos que un hombre adulto consume en un día*”; es decir, el equivalente monetario a los recursos necesarios para la supervivencia del trabajador. Para su determinación, la define como “... *la centésima parte de los bienes que necesitan cien hombres para su sustento*”, definición operativa del concepto de consumo medio. De esta forma, cuantifica el valor del trabajo e introduce también la noción de que el salario debe ser el estrictamente necesario para la subsistencia y reproducción del trabajador, base de la teoría clásica de los salarios. A su vez, anticipa la teoría del excedente, como diferencia entre el valor

ya cuantificado del trabajo y el valor de los bienes producidos, hecho que le vale ser catalogado por Marx como padre de la economía.

También necesitó Petty reflexionar sobre el dinero. Era consciente de la relación entre la cantidad de dinero y el nivel de actividad económica, pero no estableció relación entre ésta y los precios, base de la teoría económica del dinero. Su interés se centró en el efecto de la devaluación de la moneda. Según su opinión, la devaluación no podía afectar a la cantidad de bienes que la gente está dispuesta a dar a cambio (excepto entre “...esos tontos que toman la moneda por su nombre y no por su peso y finura”). Como consecuencia, los precios debían estar determinados por la cantidad de dinero en circulación, fundamento de la teoría cuantitativa del dinero, que luego retomaran John Locke, Dudley North o David Hume. A su vez, aunque de forma algo confusa, introdujo el concepto de *velocidad de circulación del dinero* para expresar el efecto que sobre la economía tiene la rápida circulación de capital, concepto que años después explicitaría Richard Cantillon.

Otra de las implicaciones desarrolladas por Petty se centra en el origen de la diferencia de riqueza de las naciones. En concreto, considera como condiciones para el desarrollo económico el uso eficiente de la energía, en su época eólica e hidráulica fundamentalmente, y la tecnología, ambas como sustitutas del trabajo humano. Estos dos aspectos, junto a la división del trabajo, son considerados como pilares para mejorar la productividad y, por tanto, para el desarrollo económico de las naciones. Se refleja otra vez la concepción de la economía de Petty, basada en la producción y el excedente, anticipando una estructura que en el siglo siguiente formalizaría Adam Smith.

Igualmente producto de este enfoque, son sus posiciones respecto al comercio y a la demografía. Respecto al primero y en su faceta exterior, se posiciona a favor de bajos aranceles para la exportación de productos acabados y de la importación de productos semielaborados y materias primas, ya que el excedente de la producción contribuiría a la riqueza del estado. Respecto al comercio interior, se opone radicalmente a los aranceles y restricciones, apoyando la llamada *unión aduanera*, constituida por varios territorios como un mercado único, exento de barreras internas, y sometido a una legislación uniforme.

Respecto a la demografía, considera a la población como una fuente de riqueza para el estado, apoyando las medidas adoptadas por éste para fomentar el crecimiento demográfico. Insistía en la necesidad de recoger datos sobre la población, su educación o sus enfermedades como fuente de información para cuestiones de interés político. De hecho, llegó a intuir la asociación entre enfermedades y clases sociales en su plan sobre la disminución de la peste en Londres, como se recoge en Hull (1899). Por ello, Petty considera necesario su análisis como requisito para cuantificar el potencial económico de los territorios, así como base para la fijación de impuestos que sostenga al estado. Este hecho le

hace confluír con John Graunt, quien comparte no sólo su interés por el estudio de la población sino también su enfoque cuantitativo de lo que debe ser un estudio científico. Tal es la afinidad de objetivos y método, que es difícil separar las aportaciones demográficas y epidemiológicas de Petty y Graunt, como puede verse en Hull (1900), Porter (1986) o Roncaglia (2005)

Hasta el siglo XVII no se produce un intento de observar, cuantificar y reflexionar sobre temas demográficos, ya que se consideraban más propios de la religión o la teología. La concepción baconiana y la importancia económica que Petty le atribuye a la población favorecen su estudio con la nueva metodología, labor que inicia Graunt con su obra *Natural and Political Observations Mentioned in a following Index and made upon the Bills of Mortality*, (1662). La base de sus estudios la constituyen las *Bills of Mortality*, listas de fallecidos que publicaban las parroquias de Londres desde finales del siglo XVI, aunque es sólo desde 1629 cuando se especifican las causas de la muerte. Con ellas, organiza la información cuantitativa extraída para resaltar algunos hechos empíricos y establecer una primera tabla de mortalidad.

Aunque sin explicitarla, posiblemente por no ser completamente consciente de ella, Graunt muestra que la ley de los grandes números está presente en los fenómenos sociales, originando regularidades estadísticas sólo detectables con el análisis agregado. Su herramienta analítica es la *regla de tres*, el único método estadístico de la época, pero es utilizada repetidamente y de forma muy ingeniosa para la extracción de resultados nuevos. Así, por ejemplo Gómez (2004) recoge “... Cerca de un tercio de los niños nacidos vivos, muere en los primeros 5 años y alrededor del 36% por debajo de los 6. Sea la peste grande o pequeña, Londres está completamente repoblada al cabo de 2 años. Hay en torno a 6,5 millones de personas en Inglaterra. En Londres hay 14 varones por cada 13 mujeres. En todo matrimonio, unos con otros, se tienen 4 niños.”

Además de la importancia histórica de ser la primera constatación de algunas regularidades, hay que resaltar la novedad de este tipo de razonamientos. Aunque actualmente estos resultados no llaman la atención, en la época eran revolucionarios, ya que cuantificaban y sometían a “*leyes*” fenómenos que se consideraban efecto de la voluntad divina o del libre albedrío de las personas (Klein, 1997). Se inició así un debate que continuó en el siglo XVIII tras la proliferación de *censos* en diversas ciudades europeas y la introducción del concepto de *hombre medio* por Quetelet, donde los defensores del libre albedrío negaban abiertamente la validez de estos razonamientos.

El origen de la disputa vuelve a estar en la fundamentación baconiana del método utilizado: sólo se deben utilizar conceptos derivados de la experiencia, que son usados para *descubrir* la estructura interna de los fenómenos naturales y *sociales*. Este objetivo era casi inalcanzable en la época por la falta de instrumentos estadísticos y los conceptos probabilísticos necesarios, pero sí determina el tipo de

cuestiones que Graunt analiza. La omisión de cualquier otro tipo de justificación metafísica, se va abriendo camino, primero de forma solapada (se presentan hechos), después más conscientemente (se describen *leyes naturales* y *leyes sociales* como regularidades útiles para la administración pública) hasta que se culmina con la construcción de teorías basadas exclusivamente en tales *leyes*.

La obra de Graunt constituye uno de los primeros trabajos *estadísticos*, en el sentido que este adjetivo adquirirá posteriormente, lo que le valió que Kendall lo situara como uno de los padres de la estadística.

## Conclusiones

El desarrollo de cualquier ciencia precisa de una fase de elaboración de conceptos con los que establecer las correspondientes teorías. Y es en este punto donde resaltan las aportaciones de los pensadores con una visión más utilitarista y empirista, entre los que destacaron Petty y Graunt. La influencia del método inductivo de Bacon es esencial en la visión cuantitativa de los fenómenos económicos y sociales. No se trata de recopilar datos para describir la realidad; más bien, su pretensión es captar e interpretar la realidad sólo mediante conceptos cuantificables, prescindiendo de aquéllos que no tienen una contrapartida observable en la naturaleza, lo que constituye la novedad de su método de análisis social. A su vez, estos conceptos cuantitativos están inmersos en una estructura socio-económica similar al modelo médico imperante en la época: es el *cuero social* como imagen del cuerpo humano; es la *anatomía política* como reflejo del modelo de anatomía del siglo XVII. En este sentido, William Petty organiza la información cuantitativa en un primer intento de obtener una contabilidad nacional, marco en el que insertar e interpretar los datos estadísticos obtenidos.

El reconocimiento a la labor de ambos autores es dispar. Por un lado, las carencias estadísticas de la época dificultaron enormemente la aceptación de la visión cuantitativa expuesta por Petty. Su pretensión de utilizar sólo magnitudes cuantificables con justificación empírica fue confundida, muy frecuentemente, con la obtención de un número que las represente. A su vez, la creciente influencia del pensamiento deductivo cartesiano, favoreció la fundamentación de la Economía de unos *principios generales*, exclusivamente formales, y la deducción lógica (matemática) de unas implicaciones que eran automáticamente válidas, y cuya contrastación con la evidencia empírica era redundante, si no contraproducente dada la dificultad de obtener esta última. Estos dos hechos, junto a la “poca confianza” aducida por Adam Smith contra la aritmética política, hicieron que las aportaciones de Petty pasasen a un segundo término.

Posteriormente, el debate sobre la naturaleza lógica y contenido de los principios de la Economía no ha reconsiderado la visión cuantitativa de Petty. Ésta no debería confundirse con la formulación matemática de dichos principios o el uso

de modelos más o menos sofisticados, temas que han sido fuente de debates metodológicos que aún continúan vigentes. Está más relacionada con aspectos epistemológicos sobre la naturaleza de los conceptos con los que construir las teorías económicas, el significado de éstas y los criterios que se podrían usar para su validación, cuestiones básicas para el desarrollo de la Economía como disciplina social científica.

Por su parte, la labor de Graunt si ha sido reconocida como el inicio de la demografía y de la epidemiología. La utilización de la información cuantitativa disponible, la minuciosidad en el análisis de las fuentes y las posibles deficiencias de los datos y el tipo de resultados destacados, no sólo marcaron el inicio de estas disciplinas, sino que constituyen uno de los primeros, y rudimentarios, ejemplos de análisis social cuantitativo y abrieron el camino para que se establecieran los conceptos relacionados con *leyes sociales* que rigen el comportamiento de las sociedades humanas.

## Bibliografía

- ARGEMÍ, L. (2004): *Liberalismo mercantilista: un cuasi sistema*. Síntesis. Madrid.
- ASPROMOURGOS, T. (1988): The life of William Petty in relation to his economics. *History of Political Economy*, 20, 337-356.
- AUBREY, J. (1949): "A Brief Life of William Petty, 1623-87. History of Economic Thought Chapters". En O. L. Dick (ed.), *Brief Lives*. Hamilton (Ontario), Canada: McMaster University Archive for the History of Economic Thought.
- BEVAN, W. B. (1894): *Sir William Petty: A Study in English Economic Literature: Vol. 9, 4. History of Economic Thought Books*. Hamilton (Ontario), Canada: McMaster University Archive for the History of Economic Thought.
- CULLEN, M. J. (1975): *The Statistical Movement in Early Victorian Britain*. Harvester Press. Brighton.
- EKELUND, R. B. y HÉBERT, R. F. (2004): *A History of Economic Theory and Method, 4th Ed.* Long Grove, IL: Waveland Press.
- GALBRAITH, J. K. (1988): *Economics in Perspective: A Critical History*. Houghton Mifflin Company. Boston.
- GÓMEZ, M. A. (2004): "Estadísticos significativos". En Santos, J. y García, M. (Coord.) *Historia de la probabilidad y la estadística (II)*. Delta. Madrid.
- GRAUNT, J. (1662): *Natural and Political Observations Mentioned in a following Index, and made upon the Bills of Mortality*. John Martyn and James Allestry. London.
- HULL, C. H. (Ed.) (1899): *The Economic Writings of Sir William Petty, together with The Observations upon Bills of Mortality, more probably by Captain John Graunt*. Cambridge University Press. Cambridge.

- HULL, C. H. (1900): "Petty's Place in the History of Economic Theory". *Quarterly Journal of Economics*, 14, 307-340.
- KLEIN, J. L. (1997): *Statistical Vision in Time. A History of Time Series Analysis, 1662-1938*. Cambridge University Press. New York.
- LANDRETH, H. y COLANDER, D. C. (2002): *History of Economic Thought*. 4th Ed. Houghton Mifflin Company. Boston.
- PETTY, W. (1691): *Political Arithmetick*. Robert Clavel. London.
- PORTER, T. (1986): *The Rise of Statistical Thinking, 1820-1900*. University Press. Princeton.
- ROLL, E. (1939): *A History of Economic Thought*. Faber and Faber Ltd. London.
- RONCAGLIA, A. (1980): *Petty. El nacimiento de la economía política*. Pirámide. Madrid.
- (2005): *The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought*. University Press. Cambridge.
- SMITH, A. (1776): *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. W. Strahan and T. Cadell. London.

## CAPÍTULO 2

# La introducción de la Estadística en las Ciencias Sociales: Estados Unidos (1920-1945)

JOSÉ M. ARRIBAS  
UNED, Madrid

### Introducción

Las rápidas transformaciones que se producen en los Estados Unidos a partir de la Guerra Civil americana, y sobre todo desde la primera Guerra Mundial, sentaron las bases del nuevo impulso que va experimentar la estadística en los ámbitos político, científico y administrativo<sup>1</sup>. La planificación de los asuntos bélicos y

---

<sup>1</sup> Evolución del número de empleados en el Gobierno de los Estados Unidos\*

<u>Año</u>	<u>(000)</u>
1920	2.603
1930	3.149
1940	4.202
1950	6.026

económicos durante la Gran Guerra fue, sin duda, un gran estímulo que coincide con el auge de las políticas económicas orientadas hacia la construcción de grandes mercados nacionales. El *laissez faire* que había caracterizado todo el siglo XIX, de pronto comenzó a dar muestras de agotamiento siendo rápidamente sustituido por nuevas políticas de planificación económica, un nuevo contexto que significó un cambio de era y un marco excepcional para el desarrollo de las nuevas herramientas e instituciones estadísticas.

Para hacernos una idea de la rapidez de esos cambios y del nuevo liderazgo norteamericano basta recordar que en 1900, EEUU ya superaba a Inglaterra en producción de carbón y acero, y que entre 1900 y la primera guerra mundial, el país americano construyó líneas de ferrocarril tres veces superiores a la distancia de las británicas<sup>2</sup>. Hasta la primera guerra mundial los Estados Unidos eran todavía importadores de capital, pero muy pronto se convirtieron en exportadores<sup>3</sup> y el crecimiento de la población también se hizo espectacular debido a la llegada masiva de inmigrantes. En 1920, por ejemplo, la población de los Estados Unidos superaba ya los cien millones de habitantes, una cantidad que pronto haría realidad la construcción de un mercado nacional con dimensiones continentales<sup>4</sup>. Después de la I Guerra Mundial, la economía norteamericana continuó creciendo hasta 1926, y aunque la crisis posterior y *la gran depresión*<sup>5</sup> ralentizaron todo el proceso, las reformas del *New Deal* constituyeron una segunda oportunidad para el desarrollo de instituciones y prácticas estadísticas.

La introducción de la estadística en las ciencias sociales va a seguir dos vías principales: de un lado la econometría y de otro la sociología, aunque la psicología también jugará un importante papel en todo lo relativo a los estudios de actitudes.

(\*) Excluidas las Fuerzas Armadas. Incluidos los empleados a tiempo parcial y tiempo completo en el ámbito federal, estatal y local. Statistical Abstract of the United States, 1959, pp 210 y 213, en "A Sociological Almanac for the United States" Editado por Murray Gendell y Hans L. Zettenberg. The Westminster Press, New York, 1961, p.44.

- 2 También se produce una rápida concentración de empresas y capital -durante la I Guerra Mundial: sólo 200 compañías de ferrocarriles, servicios públicos e industria controlaban la mitad del activo total industrial F. STERNBERG, *¿Capitalismo o socialismo?*, FCE. México, 1954, p.244.
- 3 En 1898, el presidente de la Asociación de Banqueros Americanos decía lo siguiente: «Tenemos ahora tres de las cartas que ganan en el juego de la grandeza comercial, a saber: el hierro, el acero y el carbón. Durante mucho tiempo, hemos sido el granero del mundo; ahora aspiramos a ser su factoría, y después queremos ser su banco», citado por J. A. HOBSON, *Estudio del imperialismo*, Alianza Universidad, Madrid, 1981, p. 92.
- 4 En 1932, F. D. Roosevelt definía la situación en los siguientes términos: « Nuestra instalación industrial está ya completada, y el verdadero problema hoy en día, radica en saber si en las actuales circunstancias, no es más bien excesiva. Hace tiempo que alcanzamos la última frontera, y en nuestro continente no queda ya ninguna tierra libre por descubrir y colonizar... es evidente que nos dirigimos con paso firme y seguro hacia una oligarquía económica..» M. J. RUBIO, *La formación del Estado social*, Ministerio de Trabajo, Madrid, 1991, p. 113 .
- 5 La guerra europea redujo la producción mundial en un 20%, y cuando comenzaba la recuperación sobrevino la crisis de 1929 con lo que la producción se redujo a un tercio. Véase M. Aglietta, p. 72.

Durante los años 1920, muchos economistas todavía pensaban que los ciclos económicos eran un fenómeno natural del sistema capitalista, pero la severidad de la depresión iniciada en 1929 y su inusual extensión, les obligó a revisar antiguos planteamientos forzando a los gobiernos a tomar importantes iniciativas económicas (Mary S. Morgan, 289). Tal vez, la aplicación estadística de mayor éxito en economía durante los años 1920 fueron los llamados barómetros económicos<sup>6</sup>, instrumentos de previsión en los que sobresalen grandes figuras de la economía como H.L. Moore, o Wesley C. Mitchell, un economista ligado a la escuela institucionalista de Veblen. Una interesante escuela que partía de la aversión por la teoría puramente deductiva y especulativa que adoptaba como base el individualismo metodológico y la cláusula del *ceteris paribus*.

Los institucionalistas, entre los cuales Mitchell y su NBER jugarán un importante papel, preferían “dar la primacía al hecho y su registro sobre la teoría, al holismo, más que al individualismo, a la ley histórica –según la cual, instituciones y grupos sociales orientan sus hechos –sobre la ley natural universal, y al análisis dinámico de los cambios. Ello les conduce a privilegiar el cómo sobre el porqué, y la descripción minuciosa de los ciclos sobre su explicación causal” (Armatte, 1992, 107), algo que marcará definitivamente el rumbo de la investigación social en los Estados Unidos. La Sociología, por su parte había dado ya sus primeros pasos hacia la estadística bajo la influencia del evolucionismo británico, y, en menor medida, bajo la influencia de Adolph L. Quetelet, pero es a partir de la I Guerra Mundial cuando comenzó a crear unas señas de identidad propia que tienen mucho que ver con la incorporación de las herramientas y el saber estadístico.

Desde la aparición del primer departamento de Sociología en 1892 la sociología norteamericana fue alcanzando un grado de actividad académica equivalente, si no superior, al que existía en Europa y muy pronto opta por temas de investigación diferentes a los del otro lado del Atlántico. Los sociólogos americanos se apuntaron a la investigación estadística y a los enfoques teóricos del funcionalismo durante el período de entreguerras pues como apunta Doroty Ross, “la Gran Depresión, junto a los nuevos estilos de vida y los movimientos de las vanguardias, erosionaron la concepción decimonónica de las ciencias sociales haciendo que los científicos abandonasen las interpretaciones históricas en beneficio de otras formas sincrónicas de explicación” (Porter, 2003, 219). Enfoques que alimentan una concepción ingenieril de la ciencia social<sup>7</sup> que se expandirá rápidamente con las políticas del *New Deal*. Técnicas estadísticas como la regresión y la correlación desarrolladas en principio por la eugenesia, terminarán por convertirse en herramientas comunes de la práctica política y administrativa.

<sup>6</sup> Véase Michel Armatte (1992) "Conjonctions, conjoncture et conjecture. Les baromètres économiques", *Histoire et Mesure*, VII, 1-2.

<sup>7</sup> El aspecto “ingenieril” de la ciencia social americana alcanza a todas las disciplinas: en 1936, la conferencia inaugural del nuevo presidente de la Asociación Americana de Estadística, Joseph S. Davis, se titula *Statistics and Social engineering*.

## Aplicaciones e instituciones estadísticas

En 1931,<sup>8</sup> la Asociación Americana de Estadística todavía reconocía públicamente su deuda con la estadística británica. En su discurso presidencial, W.F. Ogburn atribuía las aportaciones teóricas a los británicos y se reservaba para los americanos el campo de las aplicaciones.<sup>9</sup> La vitalidad del país, junto a la urgente necesidad de construir nuevas estructuras económicas y administrativas, hizo posible un desarrollo de la estadística mucho más rápido que en el continente europeo. Además de las clásicas aplicaciones de la astronomía, demografía, sanidad y finanzas, se abrieron nuevos espacios en el campo de las empresas de servicios públicos como compañías de agua, electricidad, telefonía, transportes, etc., no en vano, las primeras publicaciones de la Asociación Americana de Estadística (ASA) estuvieron dedicadas a las estadísticas de *Water&Power*<sup>10</sup>, y algunos de sus presidentes procedían de estas empresas, como es el caso de Walter A Shewhart. La ASA refleja muy bien los cambios que se producen en la sociedad americana durante este período, pues todas las especialidades estadísticas están allí representadas. Tal vez, la única excepción sea la física teórica, un sector que jugará un importante papel en el desarrollo de la estadística matemática y que no cuenta con representantes entre las filas de la A.S.A.

La Asociación Americana de Estadística, (ASA) se había creado en 1839 bajo iniciativa privada, pero estuvo siempre bien conectada con instancias gubernamentales. Nacida en Boston bajo la iniciativa de un grupo de profesionales

<sup>8</sup> En la reunión celebrada en Nueva York con motivo de la visita de Egon Pearson, William F. Ogburn, también Director del President's Research Comité on Social Trends de Hebert Hoover reconocía su deuda con la estadística británica aunque enfatizaba como las principales aplicaciones se estaban llevando a cabo en los Estados Unidos ("*La especialización estadística se ha desarrollado más en América que en el extranjero*") Journal of the American Statistical Association 1931.

<sup>9</sup> La respuesta de Egon Pearson consistió en subrayar el interés teórico y práctico de la disciplina (*los avances más importantes de la estadística teórica se han producido como consecuencia de problemas prácticos(.) y la conexión entre teoría y práctica es lo que distingue a los buenos trabajos estadísticos en los dos países*). Según Egon Pearson, los grandes avances en estadística teórica se produjeron en Inglaterra durante la última década del siglo XIX: "*ese periodo es uno de los de mayor entusiasmo que ha contribuido al descubrimiento de nuevas técnicas sobre todo aplicadas al campo de la herencia y la evolución. En este periodo pueden encontrarse las líneas en las que se desarrolla la teoría: el material biológico que es el principal objeto de estudio pudo ser recolectado en muestras relativamente grandes y la estadística teórica avanzó consecuentemente desde el punto de vista de las grandes muestras*". Journal of the American Statistical Association 1931.

<sup>10</sup> En el "centro histórico" de Los Ángeles existe un gran bajorrelieve en el que aparecen reflejados los momentos claves de la nación y el Estado Californiano. En mayor tamaño aparece el momento de la victoria norteamericana sobre el ejército mejicano, y a continuación, a igual tamaño y por tanto con el mismo grado de importancia, tres bajorrelieves que representan los ranchos, las diligencias y el ferrocarril, y las empresas de Water & Power, el agua y la electricidad que transformaron un terreno semi-desértico en un auténtico vergel.

con formación en medicina, derecho, teología, literatura y educación, muy pronto aparece vinculada al U.S. Census Bureau, organismo que será dirigido con relativa frecuencia por miembros de la asociación. Hasta la I guerra mundial el crecimiento de la Asociación fue bastante lento, pero a partir de la I Guerra Mundial alcanza una progresión importante,<sup>11</sup> creándose extensiones en Detroit, Chicago, San Francisco, Los Angeles, Philadelphia, Washington D.C., etc. Un desarrollo que, como apunta Frederick F. Stephan<sup>12</sup> secretario de la A.S.A. en 1940, se corresponde con el desarrollo de la nación. La vinculación de sus miembros con los hechos de armas también parece haber contribuido al desarrollo de la asociación, pues sus primeros presidentes aparecen vinculados tanto al ejército como a la gestión pública. Un buen ejemplo es Francis A. Walker, presidente desde 1883 hasta 1892, además de delegado en los congresos internacionales sobre la Paz en Londres y París que había sido también Secretario de Estado en Massachusetts y parlamentario, o el coronel Carrol D Wright, secretario en 1886 y más tarde jefe del Bureau of Labor Statistics.

En el siguiente cuadro podemos ver algunas de las características de la ASA, así como de sus presidentes. En relación a su proceso de formación, es a partir de 1895, con F.A. Walker como presidente, cuando la asociación aparece ya consolidada y alcanza una masa crítica de asociados relativamente importante. Al final de la I Guerra Mundial el período de las presidencias se acorta hasta terminar en períodos anuales, algo que va a servir para que el cargo sea ocupado por relevantes personalidades de las ciencias sociales. Baste citar a los especialistas en ciclos económicos Wesley Clair Mitchel, G.E Roberts y Warren M. Person, etc., o en los años treinta, a sociólogos vinculados con las reformas del *New Deal* como William Fielding Ogburn y Stuart A. Rice. También se producirán importantes conexiones con relevantes centros de producción estadística como el National Bureau of Economic Research, escuelas que van a jugar un papel de vanguardia en el desarrollo de las ciencias sociales como la New School for Social Research, universidades como Columbia y la Banca.

---

<sup>11</sup> Durante I Guerra Mundial, la administración norteamericana se ve abocada a planificar el envío de hombres y pertrechos militares a Europa, pero también una economía de guerra que va a favorecer el desarrollo de la actividad estadística, y la creación de numerosos puestos de trabajo en las agencias gubernamentales. Los datos estadísticos producidos por el gobierno, los datos de empresas y de instituciones financieras, comienzan a publicarse con regularidad, al tiempo que aparecen nuevos campos de investigación.

<sup>12</sup> *The centenary of the American Statistical Association*, Journal of the American Statistical Association, March 1940.

<b>American Statistical Association</b>			
<b>Año de elección Pte. (Diciembre)</b>	<b>Número de socios</b>	<b>Presidentes</b>	<b>Actividad principal Pte.</b>
1839	5	Richard Fletcher Lemuel Shattuck, secretario, médico	
1846	20	George C Shattuck	
1852	42	Edwar Jarvis, <sup>13</sup>	Medico, tablas de mortalidad 1860
1872	75	Edwar Jarvis	(31 años en la presidencia)
1883	100	Francis A. Walker, 13 años como presidente	Economist, en 1869 jefe del central bureau of Statistics, <i>The Wages Question</i> (1876), <i>Money</i> (1878), <i>Land and its Rent</i> (1883)
1888 <i>Statist. Water&amp;Power Employed in Manufacturing</i>	Primeras publicaciones	Gen. F. A.Walker	Super-intendente en los censos 1870 y 1880. Comisionado de Asuntos Indios
1889 <i>Finance Statistics of the American Commonwealths</i>	160	F.A. Walker	Presidente del MIT
1892	289	F.A. Walker	<i>Discussions in Education</i> (1899)
1895	501	Gen. F. A.Walker	
1897		Carrol D Wright	Abogado, 11 años presidente. <i>History of Wages and Prices in Massachusetts</i>
1912		Walter F Willcox	Massachusets, estadístico y sociólogo, Cornell University
1916	699	Charles P. Neil	
1918		Wesley Clair Mitchel	Institucionalista, Business cycle analysis, National bureau of Economic Research, presidente de la New Eschool for Social Research
1920	Comienzan las extensiones	George E Roberts.	Director Nat. Bureau of Economic Research. Adviser Nat. City Bank
1921		Carrol W Doten,	Economía, MIT
1922		William S. Rossiter,	Población US Census Bureau?
1923		Warren M. Persons	“Forecasting Bussines Cycles”
1924		Louis Israel Dublin,	Actuario
1925	1474	Robert E.Chaddock Vice-pres.: Henry L. Rietz	
1926		Coronel Leonard P Ayres	
1927		Edmund E. Day,	Bussines Administ. Univ. Michigan
1928		Carl Snyder,	Periodista y estadístico. Federal Reserve Bank of New York
1929		Edwin B Wilson,	Harvard, Matemáticas, Yale PhD
1930		Malcolm Rorty,	Fundador de la Econometric Society
1931		William F. Ogburn,	Sociólogo, Fundador de la .Econometric Society
1932		Irving Fisher,	Econometria
1933		Stuart Arthur Rice <sup>14</sup> ,	PhD Sociología, Columbia
1934		Frederick C. Mills	
1935		Willford I. King,	Public Health Service. Economía.
1936		Joseph S. Davis	
1937		Warren R. Burgess.	Reserva Federal Bank of New York.
1938		Robert H Coats,	Estadístico canadiense.
1939		Raymond Pearl,	Biólogo. Eugenesia y política
1940	3000	F Leslie Hayford,	General Motors
1941		Winfield W Riefler,	Chairman Central Statistical Board
1942		Alfred J. Lotka	Theorie analytique des associations biologiques
1943		Emanuel A. Goldenweiser	
1944		Helen M. Walker	Profesora, Columbia University
1945	5000	Walter Andrew Shewhart,	Western Electric, Bell Telephone Laboratories, control de calidad

Fuente: Journal of the American Statistical Association

<sup>13</sup> Edward Jarvis (1803-1884) realizó una importante encuesta sanitaria en Massachusets para el gobierno, así como las tablas de mortalidad de Estados Unidos con datos del censo de 1860.

<sup>14</sup> S.A.Rice (1889-1869), trabajó en la Administración Rosselvet y se dedicó a modernizar y favorecer el uso de la estadística y de las técnicas de muestreo en las agencias federales.

En el cuadro siguiente hemos recogido los discursos de los presidentes en su toma de posesión y en él podemos comprobar cómo el centro de las preocupaciones estadísticas va variando en función de los acontecimientos. Desde la clásica demografía, o más concretamente, la preocupación por el crecimiento de la población y los problemas relacionados con la eugenesia, hasta la economía, la planificación y la gestión del gobierno, se pasa por los temas metodológicos y los problemas derivados de la introducción de nuevas técnicas matemáticas en la profesión.

A.S.A. Discursos presidenciales		
Año (Diciembre)	Presidente	Título
1921	Carroll W. Doten	<i>"Statistics in the service of economics"</i> .
1922	William S. Rossiter	<i>"The adventure of population growth"</i>
1923	Warren M. Persons,	<i>"Some fundamental concepts of statistics"</i>
1924	Louis Israel Dublin	<i>"The statistician and the population problem"</i>
1925	Robert E. Chaddock,	<i>"The function of Statistics in undergraduate training"</i>
1926	Leonard P Ayres	<i>"The dilemma of the new statistics"</i>
1927	Edmund E. Day	<i>"The role of statistics in business forecasting"</i>
1928	Carl Snyder	<i>"The problem of prosperity"</i>
1929	Edwin B Wilson,	<i>"Mathematics and Statistics"</i>
1930	Malcolm C Rorty	<i>"Statistics and the Scientific Method"</i>
1931	William F. Ogburn,	<i>"Statistics and Art"</i>
1932	Irving Fisher,	<i>"Statistics in the Service of economics"</i>
1933	Stuart A Rice,	<i>"Statistical opportunities and responsibilities"</i>
1936	Joseph F Davis	<i>"Statistics and social engineering"</i>
1937	Warren Randolph Burgess.	<i>"The statistical equivalent of gold"</i>
1938	Robert H Coats	<i>"Science and Society"</i>
1939	Raymond Pearl	(Discurso de Aniversario)
1940	F Leslie Hayford	<i>"An inquiry into the nature and causes of statisticians"</i>
1941	Winfield W Riefler	<i>"Government and the statistician"</i>
1944	Helen M. Walker	<i>"The role of the American Statistical Association"</i>
1945	Walter A. Shewhart	<i>"The advancing statistical front"</i>

Fuente: Journal of the American Statistical Association

En el siguiente cuadro podemos comprobar cómo en 1927, la estadística se ha convertido ya en una profesión de notable éxito que alcanza el ámbito de la empresa privada. Ello no es óbice para que una gran parte de los socios de la ASA trabajen en la administración pública, en concreto, el 22% lo hace en la Administración federal y el 21% en municipios e instituciones locales. Otro importante colectivo trabajará para empresas públicas, incluso para sindicatos y organizaciones profesionales. En cuanto a su nivel de responsabilidades es muy

interesante considerar el 49% que representan los empleados de la investigación, la categoría más baja del proceso de elaboración de estadísticas, los *research workers*, un colectivo de trabajadores que en 1927 representaba un relevante papel en la investigación y la producción estadística. En relación al género, el 90% de los asociados, eran hombres, lo que parece indicar una presencia muy limitada de mujeres en el campo de la estadística profesional.

CLASSIFICACIÓN DE LOS MIEMBROS DE L'AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION. 1927	
<b>Empleados por:</b>	
El Gobierno Federal y los Estados	22%
Municipios	21%
Fábricas	10%
Empresas de Servicios Públicos	8%
Organizaciones profesionales	8%
Seguros	8%
Compañías de finanzas	7%
Fundaciones	6%
Sindicatos y asociaciones de comercio	4%
Almacenes	3%
Editores	3%
<b>Nivel de responsabilidad:</b>	
Cuadro superior (Ejecutivo)	28%
Empleado de investigación (Research worker)	49%
Enseñante	19%
Otros	4%
<b>Género:</b>	
Hombre	90%
Mujer	10%

Elaboración propia. Base: 629. Fuente: Journal of the  
America Statistical Association,

Vol 22, nº 158, Jun., 1927, p.225.

Los cambios que se producen en la organización y gestión de las universidades también van a favorecer el desarrollo de la Estadística. A partir de 1930, el centro de gravedad en los nuevos campos científicos comenzó a desplazarse hacia Gran Bretaña y Estados Unidos, países que habían experimentado importantes reformas en la estructura de sus universidades. La adopción de un sistema de departamentos y de gestión casi empresarial, junto a la creación de nuevas universidades significó una importante mejora en la relación entre investigación académica y aplicaciones. Para Joseph Ben-David, uno de los principales estudiosos del tema, la enseñanza de la estadística es un buen ejemplo de esa fisura que comienza a producirse entre el modelo europeo de las cátedras universitarias y el modelo americano de Departamentos. Por otro lado, en Europa la enseñanza de la estadística apareció en

las facultades de Derecho y la estadística administrativa que se enseñaba en esas Facultades tenía escasa, o nula, relación con las matemáticas, mientras que en los Estados Unidos, la introducción de la estadística se hizo más tarde, y la existencia de departamentos flexibles y en proceso de expansión, con puestos de trabajo más o menos independientes, hizo posible el crecimiento de una gran variedad de usos de la estadística en los más diversos campos (Ben-David, 1971)<sup>15</sup>. Muy pronto, los investigadores que todavía acudían durante los años 1920 y 1930 a formarse en Inglaterra: (Hotelling fue a Rothamsted en 1929 donde trabajó con Fisher, S. Wilks y Samuel A. Stouffer fueron a Londres pocos años más tarde, etc.) crearon grandes centros de Estadística como Columbia (Hotelling, Abraham Wald), Princeton (Wilks), Berkeley (J. Neymann), y algunos centros como la estación agrícola de la Iowa State University, ya se había convertido en lugares de referencia para la estadística aplicada de los Estados Unidos.

Algunas de estas nuevas instituciones adoptan la forma de laboratorios estadísticos como es el caso de la universidad de Columbia donde trabaja a partir de 1931 Harold Hotelling (además de sociólogos como Samuel Stouffer, y Paul Lazarsfeld), o el *Social Science Research Building*<sup>16</sup> de Chicago que tanta importancia tendrá para el desarrollo de la sociología cuantitativa. Desde el punto de vista de la metodología, el período de entreguerras marcará el límite entre la vieja estadística administrativa de los recuentos y la nueva estadística que recurre al uso de la probabilidad y a los modelos matemáticos. En el siguiente cuadro hemos resumido los acontecimientos más significativos en relación a las técnicas y las instituciones durante este período.

---

<sup>15</sup> Otro campo a tener en cuenta es el sector de los seguros, pues comienzan a demandarse previsiones para actividades como las cosechas, movimientos de precios, tipos de interés, progreso escolar, producción industrial, etc., y en general sobre el curso de la economía y los negocios. Leonard P. Ayres en su discurso presidencial de 1926, planteaba el asunto de la formación de los estadísticos dado que un gran número de ellos no contaba con la formación requerida por las nuevas circunstancias. *El dilema de la nueva estadística*, según Ayres, consistía en encontrar un equilibrio entre el complicado tratamiento matemático de una serie de problemas, y la forma de comunicar los resultados al gran público, los nuevos métodos.

<sup>16</sup> Maurice Halbwachs visitó durante su estancia en Chicago en 1930 el edificio del *Social Science Research Building*, y en su correspondencia podemos comprobar el impacto que le produjo al sociólogo europeo: “Bello edificio nuevo de cinco pisos, con ascensor, numerosos despachos, salas de clase claras y espaciosas, buen mobiliario”(…)“Esta mañana, entre mis dos cursos fui a estudiar el funcionamiento de las máquinas de calcular. Tienen una docena, tal vez más, en tres despachos que han juntado(…) Es un gran instrumento de las ciencias sociales. Allí está el corazón de su laboratorio” (…) *Todos estos estudiantes tienen el aspecto de estar en misión social. Es inaudito los despachos que hay, los casilleros, los ficheros y las jóvenes muchachas con gafas que inventarian, clasifican, hacen listados, informes, etc.*” Por lo demás, Halbwachs no era ningún neófito en asuntos de estadística, de hecho, los estudiantes graduados le solicitaron una conferencia para exponer sus ideas sobre el tema. Topalov, Ch. *Maurice Halbwachs et les sociologues de Chicago*. Revue Française de Sociologie, pp.47-3, 2006.

ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES EN LOS ESTADOS UNIDOS (1914-1945)

<b>TEORÍAS</b>	Mecanicismo	Positivismo Evolucionismo	Causalidad	Inferencia Métodos de simulación	Teoría de la decisión
<b>USOS</b>	Eugenésia	Teoría de la utilidad marginal Institucionalismo	Ciclos económicos	Teoría de muestras	Encuestas de actitudes: "The american soldier"
<b>DISCIPLINAS</b>	Biometría	Presupuestos familiares Coste de la vida del obrero Estadísticas de guerra	Barómetros económicos Estad. de parados Previsión Estadística económica Estadística matemática	Planificación económica Políticas sociales	Desempleo
<b>ACTORES</b>	GALTON SPENCER	Demografía Encuestas sociales	Henry L. MORE G. U. YULE W. C. MITCHEL Irving FISHER M. RORTY	Egon PEARSON NEYMAN	ECONOMETRÍA SOCIOLOGÍA ESTADÍSTICA
<b>INSTITUCIONES</b>	USA CENSUS BUREAU	ASA	ISI NBER Comité de Harvard	W. F. OGBURN SSRC (COGSIS) ASA Econometric Society	ABRAHAM WALD S. STOUJFFER Paul LAZARFELD
<b>TÉCNICAS</b>	Medias	Regresión Números índices	Correlación	Estación agrícola Iowa State University Muestreo	Columbia University Statistical Bureau Test de significación Muestreo probabilístico
	1899	1914	1929	1941	1945

## El caso de la Sociología

Desde la aparición de los dos primeros departamentos de Sociología en 1892 y 1894<sup>17</sup>, la sociología norteamericana puso en marcha programas específicos de Sociología en Yale, Wisconsin y Michigan, y muy pronto alcanzó un grado de actividad académica equivalente, si no superior, al que existía en Europa; en 1920, por ejemplo, los departamentos de Chicago y Columbia ya habían becado a 175 doctorandos. En cuanto a los temas de investigación, tanto si la pobreza y la cuestión social fueron también un motivo de preocupación entre los sociólogos americanos, pronto se delimitan unas líneas de actuación diferenciadas debido a que el problema de la identidad nacional, y la autoridad del Estado habían quedado relativamente resueltos desde la Guerra Civil (R. Bannister, 2003, 341).

En América, los sociólogos se van a interesar por una sociedad rural formada de inmigrantes, que se transforma rápidamente en urbana. Cuestiones como la raza, la inmigración, las cuestiones morales y culturales, aparecerán en la primera línea de las preocupaciones de sociólogos y agencias gubernamentales, y la interacción individual se convertirá en el principal objeto de la investigación (Bannister, 2003). En medio de esta nueva sociología sobresalen las figuras de William Fielding Ogburn<sup>18</sup>, Samuel Stouffer y Paul Lazarsfeld, aunque estos dos últimos pertenecen a la generación de la II Guerra mundial y se convierten en expertos en el campo de la modelización matemática. Ogburn, en cambio, es un sociólogo estadístico de la primera fase, un apóstol de la sociología “científica”<sup>19</sup> que compite con la economía por adquirir destrezas en el manejo estadístico. Veamos entonces algunas de las características biográficas del personaje.

Ogburn se había graduado en Sociología en Columbia en 1908 y también allí había recibido su Ph.D. (1912), pero buena parte de su formación práctica procedía de su trabajo en las agencias gubernamentales durante la I Guerra Mundial, y, sobre todo, en la sección del “coste de la vida” del *Nacional Labor Board*, así como en la oficina de Estadísticas de Trabajo. Ogburn era ya un experto en análisis de presupuestos familiares y en la construcción de índices de precios antes de dar la batalla por la sociología estadística, pues al igual que su colega francés Maurice Halbwachs, era un estadístico de la primera generación de cuantificadores, de los sociólogos que se centraron en las cuestiones económicas, en conocer el número de parados, en estudiar el coste de la vida, etc. Fue también miembro fundador de la

<sup>17</sup> El primero en la universidad de Chicago (1892) con Albion Small a la cabeza, y el segundo en la universidad de Columbia (1894) con Franklin Giddings en la dirección.

<sup>18</sup> En 1927 Ogburn escribía: “*En sociología, la mayor parte del trabajo descriptivo no es suficientemente cuidadoso o completo, y se parece más a un reportaje de la prensa corriente. Hay que rechazar en sociología las descripciones enredadas y confusas, la situación está madura para la utilización de estadísticas*”, Ogburn, F. “*Sociology and Statistics*”, citado por Topalov Maurice Halbwachs et les sociologues de Chicago. *Revue française de sociologie*, 47,3, 2006, p.577

<sup>19</sup> Sociología científica es el término que utiliza Ogburn para la Sociología estadística.

*Econometric Society*, e hizo incursiones en los campos de la antropología y el psicoanálisis, algo común para su formación en la época. Su juventud estará marcada por las cuestiones sociales como lo demuestra una tesis doctoral sobre legislación social y políticas democráticas, y su implicación en los movimientos por los derechos civiles y el socialismo, temas de los que se iría alejando progresivamente para orientarse hacia la actividad académica y la Administración del Estado. Agencias como el *Nacional Recovery Administration* y el *Nacional Resources Comité*, o el *Bureau of the Census* serán otros centros de su formación práctica. Su obra más célebre, aunque no estadística fue *Social Change*, escrita en 1922, cuando todavía era profesor en Columbia.

Ogburn había estudiado sociología evolucionista de la mano de Giddins y antropología con Franz Boas, pero aprendió estadística junto al prestigioso economista Henry Ludwell Moore<sup>20</sup>, algo que le permitirá trabajar durante la I Guerra Mundial en índices de precios y temas relacionados con el coste de la vida. Al menos hasta 1927, cuando Ogburn llegó a la universidad de Chicago, la sociología estaba dominada por la metodología de los estudios de caso de corte etnográfico y el influjo de la antropología, pero nada más hacerse cargo del área de Estadística y Población se produjo un cambio de orientación de las fundaciones hacia la investigación estadística que le permitió lanzar una dura campaña en favor de la cuantificación. La polémica adquirió tintes un poco agrios pero se saldó a favor de Ogburn, de modo que cuando la influencia de la sociología de Chicago comenzó a declinar a favor de la metodología estadística que representaba Columbia, en Chicago ya sobresalía el sociólogo William F. Ogburn<sup>21</sup>.

Poco antes de su llegada, a Chicago (1927) se había producido una cierta crisis en relación a los fondos de investigación que recibía el departamento de Sociología de Chicago, pues la fundación que financiaba el programa de Burges “Local Communities of Chicago” del Laura Spelman Memorial Fund, fue absorbida por la Fundación Rockefeller, y el Local Community Research Comité fue reemplazado por el recién creado *Social Science Research Council*, organismo que comenzó a orientar la financiación hacia los estudios que utilizaban la metodología estadística. Es en ese contexto en el que intervienen fundaciones públicas y privadas en favor de la incorporación de los métodos estadísticos, como Ogburn se convierte en triunfador.<sup>22</sup> Samuel Stouffer recordará años más tarde que los estudiantes de

<sup>20</sup> Miembro de la Escuela de Lausanne, había estudiado con Carl Menger en Viena y era discípulo de Leon Walras. Trabajó en el análisis empírico de los ciclos económicos y en la teoría del equilibrio. Su obra más importante es *Synthetic Economics*, publicada en 1929. Fue el maestro de grandes figuras de la econometría como Henry Schultz y W.C Mitchell.

<sup>21</sup> Aparece una red de cuantificadores representada por James P Lichtenberger y Stuart Rice en Pensylvania, Howard Odum en Nord Carolina y Stuart Chapin en Minnesota.

<sup>22</sup> La situación en palabras de Halbwachs era la siguiente: “Él (Ogburn) ha enterrado deliberadamente a la generación que le precede, los Giddins, Small, etc. Mac Dougall, famoso hace diez años, está definitivamente en el basurero. En la actualidad hay cuatro movimientos: la sociología de la cultura (cultura primitiva, salvajes, etc) Marcel Mauss nunca ha comprendido lo

Chicago cuando se encontraron a Ogburn por primera vez en el otoño de 1927, estaban tan convencidos de la supremacía metodológica de Chicago, que no fueron conscientes de que la supremacía de los sociólogos de Chicago se iba a derrumbar tan rápidamente como lo había hecho el imperio británico. (Topalov, 2006, 577)

Dos años más tarde Ogburn fue elegido presidente de la Asociación Americana de Sociología y en su discurso dirigido a los sociólogos continuó abogando por el abandono de las prácticas no científicas y el desarrollo de los laboratorios estadísticos<sup>23</sup>, algo que representaba bien el *Social Science Research Council*, pero también los centros creados en universidades como Columbia, Iowa, etc. En 1931, la Asociación de Estadística Americana le reconoce como estadístico relevante nombrándole presidente, y dos años más tarde le seguiría otro sociólogo del *New Deal* como Stuart A. Rice. En el seno de la asociación de estadística americana los sociólogos compartirán presidencias con líderes de nuevas disciplinas afines como la econometría, Malcolm Rorty e Irving Fisher, entre otros.

En el siguiente cuadro podemos apreciar las dos grandes líneas genealógicas de la sociología estadística norteamericana.

GENEALOGÍA DE LA SOCIOLOGIA ESTADÍSTICA NORTEAMERICANA	
UNIVERSIDAD DE CHICAGO, ILLINOIS	UNIVERSIDAD DE COLUMBIA, NEW YORK
Albion SMALL (1854-1926) "General Sociology" 1905	Franklin GIDDINGS (1855-1929) "The principles of Sociology, 1896 (Spencer y Tarde) Inductive Sociology 1901 Massachusetts Bureau of Labor Statistics
William I THOMAS "The Polish peasant in Europe and America" avec Znaniecki	<b>Henry Ludwell Moore</b> , PhD John Hopkins Univ., Economie et Statistique, Vienne. Professor in Columbia
	<b>Como estudiantes:</b>
<b>William OGBURN</b> "Social Change" 1922	William OGBURN Ph.D Columbia, 1912.
<b>Como estudiantes:</b>	James P LICHTENBERGER Phd. Columbia, clerg, président de la American Sociological Society en 1922
Philip HAUSER	<b>Stuart RICE</b> Ph.D. Columbia, 1924, presidente de la ASA en 1934
<b>Samuel STOUFFER</b> , Ph.D. Chicago. 1930. Enseña en la Univ. de Wisconsin	Howard ODUM, Ph D Columbia 1910
	F. Stuart CHAPIN, Phd Columbia 1911, estudios de estadística
	<b>Paul L. Lazarsfeld</b> (físico y sociólogo austriaco). Fundación Rockefeller. Universidad de Columbia)

*que era y el conoce bien el inglés. La sociología cuantitativa (esto es Ogburn). La sociología psicológica (mi libro sobre la memoria es, al parecer, muy apreciado por este grupo). Por fin la sociología práctica. Esto es Park y Burges, los niños delincuentes, los medios desorganizados de las grandes ciudades...*" (Topalov, 2006, 575).

<sup>23</sup> Para comprender la relevancia del discurso sobre el laboratorio en la sociología científica, véase Arribas J.M., Presentación del texto de William F. Ogburn, *The folkways of a scientific sociology*. Empiria nº 17-2009.

A Ogburn le sucede otra generación de sociólogos cuantificadores como Samuel Stauffer y Paul Lazarsfel. El primero había sido alumno de Ogburn en Chicago donde obtiene el PhD en sociología con una tesis titulada “*An Experimental Comparison of Statistical and Case-History Methos of Attitude Researcah*” y entre 1931 y 1932 realiza una estancia en Londres donde trabajó con Karl Pearson y Ronald Fisher. Además de profesor de Estadística y Sociología, fue director del *Social Science Research Council studies on the social effects of the depression*, y jugó un importante papel en el estudio de Myrdal sobre la población negra en los Estados Unidos. Durante la II Guerra Mundial fue director del *Research Branch, Information and Education División* del ejército norteamericano y junto a su colega Paul Lazarsfel, físico austriaco emigrado en 1930 a los EEUU con una beca de la fundación Rockefeller, formará el equipo más brillante de la sociología cuantitativa norteamericana hasta 1960, el año de su fallecimiento.

Su trabajo se distingue en todo momento por el uso de los modelos matemáticos y la integración de los datos estadísticos con la teoría social. Realizó importantes trabajos sobre las técnicas de correlación, entre los que sobresale el estudio comparativo de la fertilidad entre católicos, escrito en 1935. Sus monografías sobre los efectos de la Gran Depresión realizadas para el *Social Science Research Council*, o sus estudios sobre los movimientos migratorios, serán relevantes aportaciones al uso de los modelos matemáticos en la investigación social. Por último, hay que reconocer que el voluminoso trabajo *The american Soldier*, en el que se recogía la experiencia de los estudios de actitudes y las encuestas realizadas durante la guerra le convirtió en un referente internacional de la nueva sociología estadística.

Finalizada la II Guerra mundial, las fundaciones americanas, en colaboración con los nuevos organismos internacionales, convertirán a su colega Paul Lazarfeld en el nuevo apóstol mundial de la sociología que ahora sí lleva el sello de la metodología estadística norteamericana.

## Conclusiones

Entre la I y la II guerra mundial se produjo un cambio de paradigma en el campo de la economía y de las políticas públicas que va a dar lugar a un amplio desarrollo de las instituciones y prácticas estadísticas. La supremacía estadística norteamericana se produce en paralelo a los cambios que experimenta la sociedad americana y a la potencialidad económica y política que adquiere el país.

La colaboración con las instituciones académicas y científicas británicas, así como la facilidad de una lengua común, supusieron un gran estímulo inicial, aunque la potencia y modernidad de las instituciones y empresas norteamericanas será el verdadero caldo de cultivo de las nuevas aplicaciones estadísticas. Las

transformaciones de las universidades constituyen un nuevo empuje para el desarrollo de la estadística

En el contexto del *New Deal* se produjo un desarrollo espectacular de las instituciones y fundaciones que practican o financian la investigación estadística. Aquí se produce un fructífero cruce con la sociología en el que surgen figuras tan emblemáticas como William Fielding Ogburn, Stuart Rice, Samuel Stouffer o Paul Lazarsfeld. También se fortalecen instituciones como el Social Science Research Council o las Fundaciones Ford y Rockefeller.

Después de la II guerra mundial, EEUU cuenta ya con centros de producción estadística de referencia internacional tanto en la universidad (Iowa, Columbia, Berkley, etc.) como en la administración. El USA Census Bureau se convierte en un lugar de peregrinaje de los institutos de Estadística europeos para aprender los procedimientos de explotación censal<sup>24</sup>. Por otro lado las fundaciones privadas contribuyen con sus fondos a la supremacía del modelo estadístico en la investigación social.

## Bibliografía

- AGLIETTA, M. (1976): *Regulación y crisis del capitalismo*. Siglo XXI Editores. México.
- ARMATTE, M. (1992): "Conjonctions, conjoncture et conjecture. Les baromètres économiques". *Histoire et Mesure*, VII, 1-2.
- (2000): *Naissance, vie et mort de l'économétrie de la Cowles Commission. Le changement de paradigme de la fin des années 1970*, Séminaire EDOCF, Université Paris-Dauphine. Paris.
  - (2002): "El coeficiente de correlación y los economistas (1910-1940)". En Arribas, J. M. y Barbut, M. *Estadística y Sociedad*, UNED.
- ARMATTE, M. y DESROSIERES, A. (2000): "Méthodes mathématiques et statistiques en économie: nouvelles questions sur d'anciennes querelles". En J.P. Beaud y J.G. Prevost (eds.), *L'ère du chiffre, systèmes statistiques et traditions nationales*, Presses Universitaires du Québec, 431-481. Montréal.
- ARRIBAS, J. M. (2004): "Los comienzos de la estadística matemática". En *A.H.E.P.E.*, Delta Universidad, 331-358.
- (2009) "Presentación del texto de William Fielding Ogburn: Los Folk-ways de una sociología científica". *EMPIRIA*, nº 17."
- BANNISTER, R. (2003): "Sociology". En Porter, T. y Ross, D. (ed.), *The Cambridge History of Science*, V.7.

---

<sup>24</sup> Lvy Brul viaja en nombre del INSEE francés y algo más tarde, en 1949, lo hace Enrique Cansado Maceda en nombre del INE español.

- BEN-DAVID, J. (1971): *The scientist'Role in Society*. Prentice-Hall. New York.
- CONVERSE, J. M. (1987): *Survey Research in the United States, Roots&Emergence 1890-1960*. University of California Press.
- DAVID, H. A. (1998): "Statistics in US. Universities in 1933 and the establishment of the statistical laboratory at Iowa State". *Statistical Science*, vol 13, nº 1.
- DIDIER, E. (2009): *En quoi consiste l'Amérique? Les statistique, le New Deal et la démocratie*. Éditions la découverte.
- HALBWACHS, M. (1923): "L'expérimentation statistique et les probabilités". *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, Juillet-Décembre .
- HOBSON, J. A. (1981): *Estudio del imperialismo*. Alianza Universidad. Madrid.
- OGBURN, W. F. (1930): "The folk-ways of a Scientific Sociology" *The Scientific Monthly*, Vol. 30, nº4, 300-306.
- (1932): "Statistics and Art". *Journal of the American Statistical Association*, nº 177, Vol XXVIII, March, 1-8.
  - (1934): "Limitations of Statistics". *Journal of the American Statistical Association*, vol. 40, nº 1, July, pp 12-20.
- PORTER, T. y ROSS D (2003): *The Cambridge History of Science*, V.7. Cambridge University Press.
- RUBIO, M. J. (1991): *La formación del Estado social*. Ministerio de Trabajo. Madrid.
- STERNBERG, F. (1954): *¿Capitalismo o socialismo?* FCE. México.
- STOUFFER, S. (1962): *Social Research to Test Ideas. Selectec writings of Samuel Stouffer*. With an introduction by P.F. Lazarsfeld. Free Prees of Glencoe.
- TOPALOV, CH. (2006): "Maurice Halbwachs et les sociologues de Chicago". *Revue française de sociologie*, 47, 3.

## CAPÍTULO 3

# Existe-t-il une limite à la vie humaine ? La controverse Vincent-Gumbel et l'arbitrage de Fréchet (1937-1951)

MARC BARBUT

L'École des Hautes Études en Sciences Sociales

JACQUES VERON

Institut National d'Etudes Démographiques

Pour Benjamin Gompertz (1825) la mortalité augmente exponentiellement avec l'âge au delà de 30 ans. Un siècle plus tard, plusieurs auteurs, parmi lesquels Corrado Gini, Filadelfo Insolera et Bruno de Finetti, considèrent qu'elle tend à se stabiliser aux grands âges.

Cette question de l'évolution de la mortalité avec l'âge, et par la même de l'existence d'un âge limite, a nourri une controverse opposant le démographe français Paul Vincent au mathématicien et statisticien d'origine allemande Emil J. Gumbel. Restée certes confidentielle, cette controverse est révélatrice de profonds désaccords sur l'usage de la statistique et des probabilités. Le mathématicien français Maurice Fréchet en vient à arbitrer ce différend.

La controverse est née de la critique à laquelle se livre Vincent de l'ouvrage *La durée extrême de la vie humaine*, publié par Gumbel en 1937 ; on peut considérer qu'elle se clôt avec la publication en 1951 par Vincent d'un article sur la mortalité des vieillards.

## Emil Julius Gumbel et *La durée extrême de la vie humaine*

Avant la publication du livre de Gumbel en 1937, divers travaux ont eu pour objet les principaux thèmes étudiés dans ce livre. Ils ont donné lieu à plusieurs articles, dont ceux de Gumbel lui-même, que l'on peut regrouper en trois rubriques:

- lois du maximum,
- la mortalité aux grands âges,
- l'âge limite de la mort.

### 1. Lois du maximum

- 1923 - E. L. Dodd, « The greatest and least variate under general laws of error », *Transactions of the A.M.S.*, vol. 25, n° 4.
- 1923 – R. von Mises, « Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe », *Sitzungsberichte der Berliner mat. Gesellschaft*, Berlin, t. 22.
- 1927 – M. Fréchet, « Sur la loi de probabilité de l'écart maximum », *Annales de la société polonaise de mathématique*, n°5 – p. 93-116,
- 1928 – R.A. Fisher et L.H.C. Tippett, « Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample », *Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 24-2
- 1933 – E. J. Gumbel, « La distribution limite de la plus petite valeur parmi les grandes », *C.R.A.S.*, Paris, 197-20
- 1934 - E. J. Gumbel, « Les moments des distributions finales de la première et de la dernière valeur », *C.R.A.S.*, Paris, 1198, p. 141
- 1935 - E. J. Gumbel, « Les valeurs extrêmes des distributions statistiques », *Annales de l'I.H.P.*, Paris, t. IV, Fasc. 2.
- 1935-36 – E. J. Gumbel, « La plus grande valeur », *Aktuarske Vedy*, Prague, t. V., n°2-4
- 1936 - E. J. Gumbel, « Les inondations et la théorie de la plus grande valeur », *C.R.A.S.*, Paris, 203-1.
- 1936 - E. J. Gumbel, « Les distances extrêmes entre les émissions radioactives », *C.R.A.S.*, Paris 203-5.

Les deux derniers titres témoignent de la volonté qu'a eue Gumbel de montrer des applications pratiques de sa loi du maximum.

D'autre part, assez curieusement, la contribution de Maurice Fréchet (1927) ne figure pas dans la bibliographie fournie par Gumbel en appendice à son livre ; il est vrai que, parmi les trois « lois du maximum », celle de Fréchet ( $\exp(-Ax^a)$ ) est différente de celle de Gumbel ( $\exp(-Ae^x)$ ).

## 2. La mortalité aux grands âges

- 1931 – C. Gini et L. Galvani, « Tavola di mortalità della popolazione Italiana », *Annali di Statistica*, Serie VI – vol. VIII, p. 73-89.
- 1933 – M. Huber, « Le calcul des taux de mortalité aux âges élevés », *Revue de l'I.I.S.*, La Haye, 3-4.
1931. F. Insolera, « On the oldest age », *Giornale di Matematica Finanziaria*, Torino, Serie II, V.1, n°1.
- 1934 – B. de Finetti « Sul compartimento assintotico della mortalita », *Rencontri del Circolo Matematico di Palermo*, t. 58, p. 359-366.

Il semble que C. Gini (avec L. Galvani) ait été le premier à remarquer, dans son article de 1931, que les taux de mortalité cessent de croître aux âges élevés. Or cet article n'est pas cité par Gumbel alors que les trois autres le sont.

## 3. L'âge limite de la mort

- 1932 - E. J. Gumbel, « L'âge limite » (Résumé), *Bulletin de la S. M. F.* Paris, V. LX, fasc. 3-4.
- 1933 - E. J. Gumbel, « Das Alter des Mathusalem », *Zeitschrift für Schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, Basel t. 69, n° 4;
- 1934 – B. de Finetti, Articulo ditto.
- 1934 - E. J. Gumbel, « L'età Limite », *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, Roma, T. 1.
- 1934 - E. J. Gumbel, « Les plus grands âges en Suisse », *Zeitschrift für Schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, Basel t. 70, n° 4;
- 1934 - E. J. Gumbel, « Les paradoxes de l'âge limite », *C. R. A. S.*, Paris, 199, 19.
- 1935 - E. J. Gumbel, « Le plus grand âge, distribution et série », *C.R.A.S.*, Paris, 201-5.
- 1935 - E. J. Gumbel, « Le piu alte età in Suezia », *Giornale dell'Istituto It. Degli Attuari*, t. VI, n°4.

1936 - E. J. Gumbel, « L'âge limite », *Aktuarske Vedy*, Prague, t. VI, n°1.

[C.R.A.S.: Comptes-rendus de l'Académie des Sciences

I.H.P.: Institut Henri Poincaré

SMF: Société mathématique de France

IIS: Institut international de statistique]

En dehors de l'article de B. de Finetti (1934) qui pose très clairement le problème, tous ces textes sont de Gumbel lui-même. On peut observer qu'il n'hésite pas à donner le même titre - si non le même contenu- à divers articles publiés dans des revues différentes.

Quand à Finetti, il penche pour l'existence d'une borne supérieure strictement inférieure à 1 pour les taux de mortalité, et pour la possibilité qu'il n'y ait aucune limite supérieure à la durée (théorique) de la vie humaine.

#### 4. Eléments biographiques

18 juillet 1892 – Naissance à Munich, dans une famille juive de bourgeoisie moyenne, bien intégrée à la société bavaroise.

1910-1913 – Etudes de mathématiques et d'économie à l'Université de Munich.

1913 – Diplômé en actuariat.

1913-1914 – Assistant de Georg von Mayr, qui dirige son travail de thèse.

24 juillet 1914 – Docteur en « démographie mathématique » de l'Université de Munich.

Aout 1914 – Engagé volontaire dans l'armée allemande, il est ajourné pour raisons de santé.

1914-1918 – Service civil à Berlin, comme ingénieur en aéronautique, puis en téléphonie.

1916 – Etudes de physique à l'Université Humboldt de Berlin. Rencontre avec Albert Einstein et, surtout, Ladislaus von Bortkiewicz, qui aura une grande influence sur sa carrière ultérieure. C'est à partir de cette année-là qu'il devient militant pacifiste, antinationaliste et, plus tard, antinazi.

1923 – Nommé « Privatdozent » à l'Université de Heidelberg. Grâce à l'appui de Bortkiewicz, il y est titularisé comme « Professor ordinarius », malgré un vote hostile de sa Faculté.

1926 – En butte à l'hostilité de ses collègues, il prend une année de congé sabbatique à Moscou, où il étudie les manuscrits mathématiques de K. Marx.

- 1933 – Des la prise de pouvoir par les nazis, il est destitué de son emploi de professeur. Il se réfugie en France, où Emile Borel et Maurice Fréchet seront ses protecteurs.
- 1934-1937 – Il enseigne la statistique à l’Institut de sciences financières et d’assurances de Lyon.
- 1937 – Nommé chercheur au Centre national de la recherche scientifique (C.N.R.S.), à Paris.
- Juin 1940 – Il s’enfuit aux Etats-Unis et s’installe à New York où il est « consultant » pour diverses entreprises et administrations, notamment pour l’O.T.A.N., ce qui ne manque pas de surprendre, s’agissant d’un ancien communiste, en pleine période de maccarthysme.
- 1953 – Nommé professeur de statistique à l’Université Columbia.
- 10 septembre 1966, mort à New-York.

E. J. Gumbel eût deux contributions majeures à la science:

- en démographie, en considérant la durée de la vie humaine comme une variable aléatoire,
- en statistique, en trouvant l’une des trois lois du maximum d’un échantillon d’une variable aléatoire, pour des tirages indépendants (les deux autres lois – selon la valeur de certains paramètres- seront celles de Fréchet et de Weibull).

Livres de E. J. Gumbel:

- 1922 – *Vier Jahre politischer Mord*. Verlag der Neuen Gesellschaften, Berlin  
 [Les plus célèbres de ces meurtres furent ceux de Karl Liebknecht et de Rosa Luxemburg en 1919 puis, en 1922, celui de Walter Rathenau].
- 1932 – *Das Zufallgesetz des Sterbens* (la loi de la mortalité), Stat. Zentral-Blatt – 12, Berlin.
- 1937 – *La durée extrême de la vie humaine*, Hermann, Paris.
- 1958 – *Statistics of Extremes*; Columbia University Press, New York.

## 5. La durée extrême de la vie humaine

1. Soit une population dont la courbe de mortalité a pour expression théorique  $M(x)$  où  $x$  est l’âge en années et  $M(x)$  le nombre de survivants à l’âge  $x$ . On la suppose normée et adéquate à bien représenter les observations à partir d’un certain âge  $x_0$ . On pose donc:

$$M(x_0) = 1$$

L'idée de Gumbel est de considérer la durée de la vie dans cette population comme une variable aléatoire  $X$  dont  $M(x)$  est la fonction de répartition:

Pour  $x \geq x_0$ :

$$\Pr(X > x) = M(x).$$

Dès lors, écrit Gumbel (p.4), « chercher un âge limite est dépourvu de sens. »

La densité de probabilité correspondante est:

$$-M'(x) = m(x)$$

Elle passe par un maximum pour  $x = x^*$ , abscisse du point d'inflexion de la courbe de mortalité (figure 1 et 2).

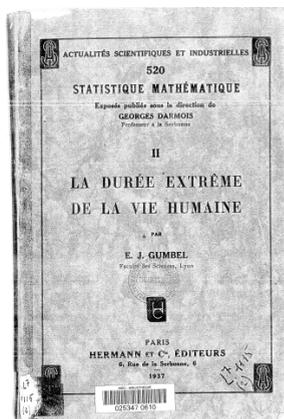
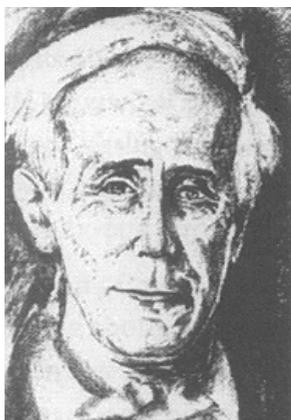
Ce mode  $x^*$  de la distribution est ce que les démographes (et Gumbel) appellent « l'âge normal »: la probabilité d'atteindre cet âge est, de même, la probabilité normale.

Quant à la dérivée logarithmique:

$$\tau(x) = \frac{m(x)}{M(x)} = \frac{-M'}{M}$$

c'est le taux (ou quotient) de mortalité à l'âge  $x$ .

Définition. La plus grande valeur observée de la variable aléatoire  $X$  dans la population est appelée par Gumbel « le plus grand-âge ». On pourrait aussi bien dire « âge maximum ».



2. Si  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$  sont  $n$  observations indépendantes de la variable  $X$ , le plus grand âge dans la population qu'elles constituent est:

$$Z_n = \max_i X_i$$

Et l'on a évidemment:

$$\Pr(Z_n < Z) = (1 - M(z))^n$$

Définitions: La variable aléatoire  $Z_n$  à son tour, a un mode  $Z_n^*$  et une espérance  $\bar{Z}_n$ . Gumbel nomme:

- $Z_n^*$  le dernier âge
- $\bar{Z}_n$  l'âge limite.

Remarques:

L'hypothèse de l'indépendance des  $X_i$  (durées de vie humaine dans une population donnée) est très simplificatrice.

Les termes employés par Gumbel de « dernier âge » et d' « âge limite » pour désigner ce qui ne sont que deux paramètres (mode et moyenne respectivement) de la distribution du dernier âge sera source de confusions et parfois de contresens au sujet de sa théorie.

3. Sous des conditions très générales concernant la fonction  $M(x)$  (dérivabilité, unimodalité, existence des deux premiers moments), Gumbel démontre alors plusieurs propriétés, valables pour les grandes valeurs de  $n$ .

Par exemple:

- le dernier âge  $Z_n^*$  augmente très lentement avec  $n$  et  $M(Z_n^*)$  est de l'ordre de  $1/n$ ,

-  $Z_n^* > x^*$

Soient  $\tau(n) = \tau(Z_n)$  le taux de mortalité au plus grand âge  $Z_n$  et  $\sigma(n)$  l'écart type de  $Z_n$ .

Alors:

*Théorème* (Gumbel). Quand  $n$  augmente indéfiniment,  $Z_n^*$ ,  $\bar{Z}_n$ ,  $\tau(n)$  et  $\sigma(n)$  ont des limites  $Z^*$ ,  $\bar{Z}$ ,  $\tau$  et  $\sigma$  respectivement, et l'on a les relations:

$$(G1) \quad \sigma = \frac{\pi}{\tau\sqrt{6}} \quad \bar{Z} = Z^* + \frac{C}{\tau}$$

Ici  $C$  est la constante d'Euler:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) - \ln(n) \right]$$

Soit  $C \approx 0,58$

*Théorème (Gumbel)*

Posons:

$$Y_n = \tau_n (Z_n - Z_n^*) \text{ et } Y = \tau (Z - Z^*)$$

Alors, la distribution de la variable réduite  $Y_n$  tend vers celle de  $Y$  et l'on a:

$$\Pr (y < Y < y + dy) = \tau (\exp[-y - e^{-y}]) dy$$

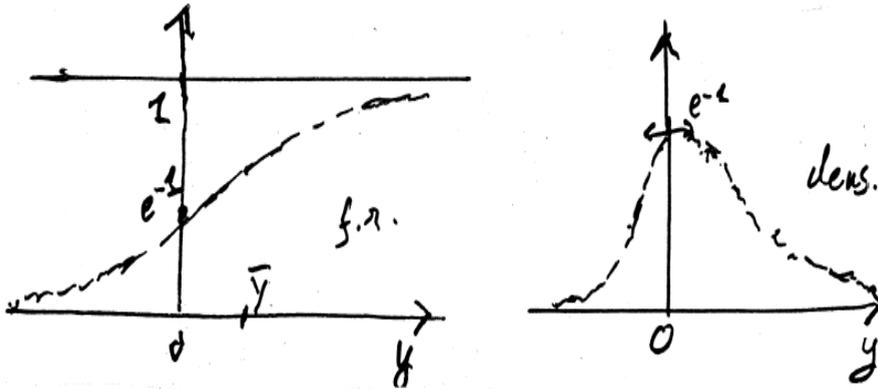
D'où l'on déduit, pour la fonction de répartition de  $Y$ :

$$(G2) \quad W(y) = \Pr (Y < y) = \exp(-e^{-y})$$

$W$  est appelé la distribution de Gumbel.

Ronald Fisher avait conjecturé sa forme et Bruno de Finetti l'avait démontrée dans le seul cas particulier où  $X$ , la variable parente, a une distribution de Laplace-Gauss.

L'allure de la fonction de répartition  $W$ , et celle de sa densité  $W'$ , sont données par les figures 1 et 2 ci dessous.



Figures 1 et 2

Le tableau ci-dessous reproduit celui de Gumbel, figurant dans son livre, p. 27.

V. — Probabilités des plus grands âges.

Variable réduite $y$	Probabilité $W(x)$
-1,5	0,01132
-1,0	0,06599
-0,5	0,19230
0	0,36788
0,5	0,54325
1,0	0,69220
1,5	0,80003
2,0	0,87345
2,5	0,92120
3,0	0,95143
3,5	0,97023
4,0	0,98183
4,5	0,98893
5,0	0,99328
5,5	0,99592

En pratique, on estime  $\bar{Z}_n$  et  $\sigma$  à partir des données observées ; pour  $n$  grand les estimations de  $\bar{Z}$  et  $\sigma$  sont respectivement égalées à  $\bar{Z}_n$ ,  $\sigma_n$

$Z^*$  et  $\tau$  s'en déduisent par les formules (G1) ci dessus, avec  $C \# 0,5772$ .

On notera que:

$$\Pr(-1,5 \leq Y \leq 5,5) = 0,999$$

Ce qui donne un ordre de grandeur pratique de la variable  $Y$  analogue à celui de la variable de Laplace-Gauss, par exemple, soit de -3 à +3, mais ici la distribution est dissymétrique.

On notera surtout que

$$\Pr(Y > 0) = W(0) = 1 - e^{-1} \# 0,63$$

ce qui signifie que le « plus grand âge » est supérieur au « dernier âge »  $Z^*$  dans 63 % des cas !

De même, il est supérieur à « l'âge limite » dans 43 % des cas.

Ceci montre ce qu'ont d'inapproprié les appellations choisies par Gumbel.

- Notons encore que la médiane de  $Y$ , égale au logarithme itéré  $\ln(\ln(2))$ , vaut environ 0,3665, ce qui illustre bien le caractère dissymétrique de la distribution.

Pour clore ce chapitre, laissons encore la parole à Gumbel (p. 20):

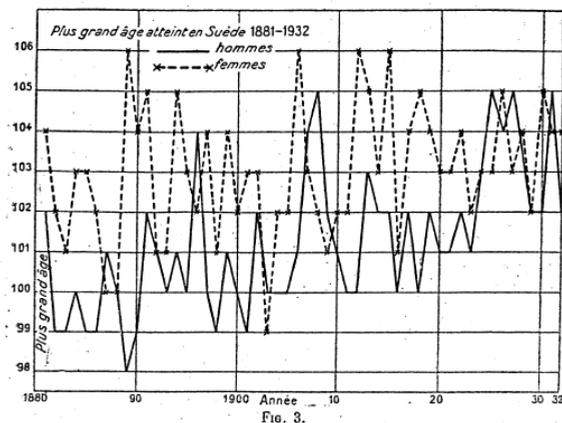
« Du moment que l'on traite un problème du point de vue probabiliste, on ne peut arriver qu'à des probabilités ».

E. Gumbel ne s'en est pas tenu à la seule théorie. Les derniers chapitres de son livre sont consacrés à des applications.

Par exemple, dans le chapitre IV, il étudie l'ajustement de sa loi à deux jeux de données:

- la statistique du plus grand âge observé annuellement en Suisse de 1879 à 1933,
- la même pour la Suède de 1881 à 1932.

La figure ci-dessous, qui représente graphiquement la série suédoise est reproduite du livre de Gumbel (p. 32).



On remarquera que le plus grand âge observé ( $Z$  dans les notations) fluctue fortement d'une année sur l'autre, entre 96 et 105 ans pour les hommes, entre 96 et 106 pour les femmes. On notera également une tendance à une croissance (faible) des minima de ce plus grand âge du début à la fin de la période de 52 ans observée.

Pour la Suède, les fluctuations sont un peu moins marquées et la tendance à la croissance des minima est plus nette.

Le tableau VIII (p. 35) donne les fréquences absolues cumulées de ces 55 observations pour la Suisse et des 52 de la Suède (tableau ci-dessous).

VIII. — *Fréquences observées du plus grand âge.*

Plus grand âge (1)	Hommes		Femmes		Population entière	
	Suisse	Suède	Suisse	Suède	Suisse	Suède
	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
96 . . . . .	1	0	0	0	0,5	0,0
97 . . . . .	9	0	3	0	6	0,0
98 . . . . .	18	1	9	0	13,5	0,5
99 . . . . .	28	8	18	1	23	4,5
100 . . . . .	39	21	31	3	35	12,0
101 . . . . .	44	30	43	9	43,5	19,5
102 . . . . .	46	42	51	20	48,5	31,0
103 . . . . .	53	44	52	32	52,5	38,0
104 . . . . .	54	48	54	42	54	45,0
105 . . . . .	55	52	54	48	54,5	50,0
106 . . . . .	55	52	55	52	55	52,0

Après ajustement de ces données à la distribution, réalisée comme on l'a expliqué dans le paragraphe précédent, Gumbel donne dans son tableau IX (p. 36) les valeurs théoriques obtenues.

On notera deux points:

- contrairement aux écoles anglo-saxonnes de la même époque, Gumbel travaille non sur les histogrammes, et avec les moments, mais sur les distributions cumulées. C'est là à notre avis un moyen beaucoup plus sûr pour réaliser un ajustement.

- les valeurs théoriques sont si proches des valeurs observées que Gumbel n'a pas jugé utile de faire un test d'adéquation. En l'occurrence, le test de Kolmogorov, que Gumbel connaissait sûrement (il date de 1933), aurait été approprié.

IX. — *Probabilités des plus grands âges en Suisse (1879-1933).*

Variable de la distribution finale $y$ (1)	Plus grands âges $x$			Fréquences absolues $kW(x)$ (5)
	Hommes	Femmes	Ensemble	
	(2)	(3)	(4)	
- 1,5	96,27	97,37	96,77	0,62
- 1,0	97,09	98,07	97,55	3,63
- 0,5	97,92	98,77	98,32	10,58
0	98,74	99,47	99,09	20,23
0,5	99,56	100,16	99,86	29,99
1,0	100,39	100,86	100,64	38,07
1,5	101,21	101,56	101,41	44,00
2,0	102,04	102,26	102,18	48,04
2,5	102,86	102,96	102,95	50,67
3,0	103,68	103,66	103,73	52,33
3,5	104,51	104,36	104,50	53,36
4,0	105,33	105,06	105,27	54,00
4,5	106,16	105,76	106,04	54,39
5,0	106,98	106,46	106,82	54,63
5,5	107,80	107,16	107,59	54,78

Après cette étude où l'ajustement de sa loi est fait directement sur les données, Gumbel applique sa théorie à des courbes de mortalité théoriques, mais ajustées à des données empiriques.

Dans le chapitre V, il s'agit, pour les données américaines, de la loi de Lexis (au delà de l'âge « normal », la courbe est une courbe de Laplace-Gauss tronquée).

Dans le chapitre VI, c'est une loi de Gompertz:

$$M(x) = \exp[a(1-e^{px})]$$

Qui est utilisée après ajustement aux données suédoises.

Enfin, Gumbel met en évidence deux observations qui semblent à première vue paradoxales.

Dès son premier chapitre, il observe que deux populations dont la première a un âge « normal » de la mort supérieur à celui de la seconde, leurs vies « normales » peuvent être dans l'ordre contraire. Ce phénomène est particulièrement sensible entre les populations blanche et noire des Etats-Unis, comme le montre son tableau II (page 10) reproduit ci-après.

Mais il ne s'agit que d'un paradoxe apparent: l'âge « normal » est une valeur centrale de la distribution, alors que « la vie normale », qui est l'espérance de survie au delà de l'âge normal, fournit une mesure de la dispersion.

Il est d'ailleurs assez naturel que si l'on vit en moyenne plus vieux, on survive à cet âge moyen moins longtemps.

II. — Valeurs normales pour les Blancs et les Nègres U. S. A.

Population (1)	Age normal $\xi$		Vie normale $e(\xi)$		Probabilité normale $l(\xi)$	
	Blancs (2)	Nègres (3)	Blancs (4)	Nègres (5)	Blancs (6)	Nègres (7)
h. 01 . . .	75,053	56,915	6,822	43,888	0,21287	0,27745
f. 01 . . .	75,769	66,571	7,025	40,808	0,23794	0,20145
h. 40 . . .	74,000	59,143	7,130	42,027	0,23590	0,24789
f. 40 . . .	73,800	58,000	7,695	43,622	0,29218	0,31561
h. 01/40 . . .	75,430	64,324	6,747	40,491	0,24294	0,18359
f. 01/40 . . .	75,133	66,284	7,235	40,685	0,25880	0,19886
Columbia : h. 5/10	—	—	—	40,578	—	0,19106
— f. 5/10	—	64,077	—	40,705	—	0,18100

Remarque: les données de ce tableau datent de près d'un siècle. Il est probable que de nos jours le contraste serait moins accentué.

L'autre paradoxe, que Gumbel appelle paradoxe du dernier âge, consiste en ce que la population dont l'âge « normal » est le plus petit peut avoir le plus grand des deux « derniers âges ».

Mais cette contradiction perd beaucoup de sa force si l'on se souvient que, dans le vocabulaire employé par Gumbel, de même que l'« âge normal » d'une population est le mode de la distribution de ses durées de vie, le « dernier âge » n'est, lui aussi, que le mode d'une autre distribution: celle des plus grands âges au décès dans cette population.

Et que ces deux modes puissent varier en sens inverse se démontre, dans le cas par exemple d'une distribution parente obéissant à une loi de Gompertz.

D'autre part, plus une population est nombreuse, plus le plus grand âge observé a des chances d'être élevé:  $Z_n$  est évidemment fonction croissante du nombre d'observations.

Or la situation « paradoxale » aura tendance à se reproduire lorsque l'une des populations, pauvre, est beaucoup plus nombreuse que l'autre, riche. Gumbel met le phénomène en évidence dans une comparaison entre l'Inde –pauvre mais très peuplée- et l'Australie –riche mais peu peuplée. C'est son tableau XVI (page 57), ci-dessous.

XVI. — Le paradoxe du dernier âge.

Nombre d'observations $N(\xi)$	Dernier âge réduit $\tau$	Dernier âge virtuel $\omega$		Nombre d'années $\varepsilon$ « observées »	
		Indes	Australie	Indes	Australie
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$10^3$	3,490	103,59	98,23	0,001	0,002
$10^4$	3,908	111,46	101,11	0,01	0,024
$10^5$	4,218	117,73	103,43	0,1	0,244
$10^6$	4,528	122,93	105,35	1	2,44
$10^7$	4,768	127,42	107,00	10	24,4
$10^8$	4,927	130,39	108,15	100	244

Un autre moyen d'avoir plus d'observations est d'observer plus longtemps. C'est aussi cela que le tableau illustre.

## Paul Vincent: une critique radicale de l'approche de Gumbel

### 1. Eléments biographiques

Naissance en 1912.

Ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Etudes également de droit public et d'économie politique.

Entre en 1943 à la Fondation nationale pour l'étude des problèmes humains, fondée par Alexis Carrel.

Devient, en 1945, chef de la section des études quantitatives et de la conjoncture démographique à l'Institut national d'études démographiques (INED) qui vient d'être créé.

Mort en 1979.

## **2. Communication au Congrès de Berne sur la mortalité aux âges élevés**

Dans sa communication au Congrès de l'IIS, qui se tient à Berne en 1949, Paul Vincent rappelle les deux obstacles majeurs à l'évaluation de la mortalité aux âges élevés:

- la faiblesse du nombre d'observations,
- leur mauvaise qualité.

Vincent précise les données statistiques nécessaires aux calculs de quotients de mortalité aux grands âges:

«Désirant pousser nos calculs jusqu'à des âges aussi élevés que possible, le choix du matériel statistique de base était obligatoirement circonscrit par les conditions suivantes:

- 1° état civil fonctionnant dans de bonnes conditions depuis plus d'un siècle avant le début de la période d'observation ;
- 2° statistiques de décès collectées par année de naissance ;
- 3° série d'observations suffisamment longue ;
- 4° population suffisamment vaste. »

Le problème rencontré lors du calcul de quotients de mortalité aux âges élevés tient au fait que des données viennent de deux sources différentes -état-civil et recensement - ce qui expose au risque d'erreurs et omissions radicalement différentes d'une source à l'autre. L'enregistrement des événements peut être incomplet mais la détermination de l'âge peut également souffrir d'imprécision.

Si la correspondance entre données d'état civil et de recensement est imparfaite, les événements figurant au numérateur du quotient de mortalité ne concernent pas vraiment les personnes figurant au dénominateur. C'est la raison pour laquelle Vincent propose de calculer les nombres de survivants à chaque âge par la « méthode des générations éteintes ». Cette méthode consiste à cumuler les décès à partir des âges les plus élevés pour obtenir à chaque âge les populations réellement soumises au risque de décéder entre deux âges successifs.

Selon Vincent, en France, la courbe de mortalité du sexe féminin (figure 3) est « d'une régularité remarquable » et elle suggère, sur la période considérée, l'existence d'un âge limite au voisinage de 105 ans. Il n'y aurait par conséquent pas d'évolution asymptotique de la mortalité aux grands âges. Les données suédoises conduiraient, selon lui, aux mêmes conclusions.

Vincent entend donc bien montrer l'existence d'un « âge limite »  $\alpha$ , pour une population donnée et une période donnée, tel que  $q_\alpha = 1$ . Cela n'interdit pas d'observer un décès au delà de l'âge  $\omega = \alpha + 1$  car, écrit Vincent, « le quotient de mortalité est une notion statistique ; il n'a qu'une valeur moyenne ».

Cette communication au Congrès de l'IIS se termine par une sévère critique des travaux de Gumbel sur la mortalité:

« Remarquons enfin que l'existence de cet âge limite statistique réduirait à néant, s'il en était besoin, le "paradoxe du dernier âge" de Gumbel. Mais il n'en est pas besoin, car il n'y a de paradoxal dans ce "paradoxe" que le fait que Gumbel ne se soit pas aperçu de ce que, ses conclusions étant radicalement fausses –ce que lui aurait immédiatement appris la simple comparaison des nombres de survivants aux âges élevés de deux tables de mortalité, l'une "favorable" et l'autre "défavorable"-, il en résulte tout simplement que son hypothèse de base –suivant laquelle la répartition de décès aux âges élevés est assimilable à une distribution normale- est inadmissible. »

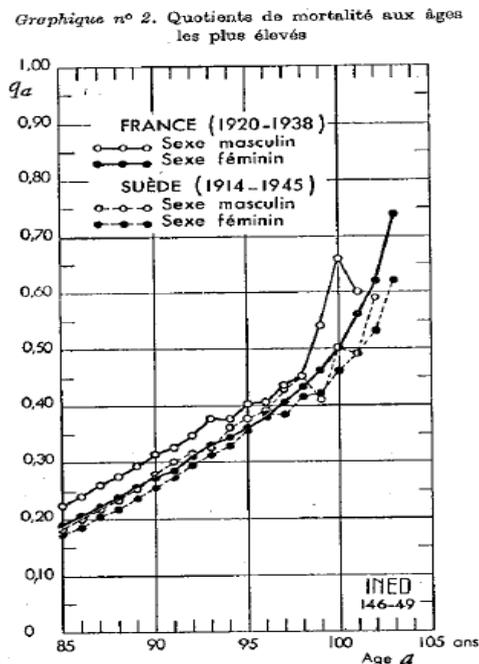
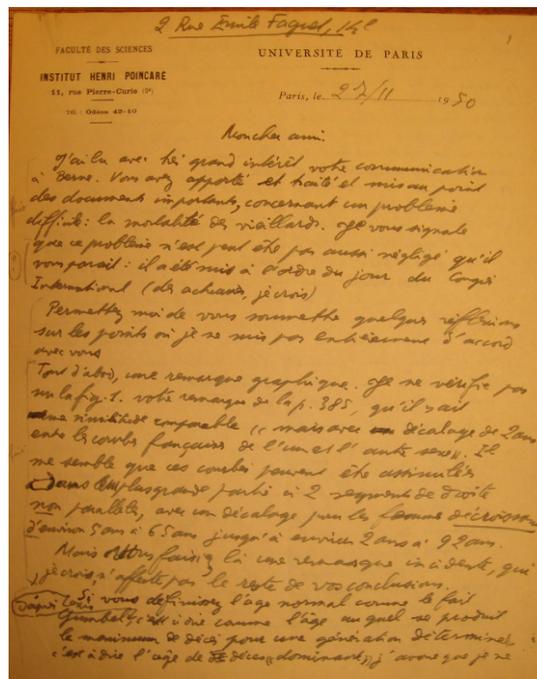


Figure 3. Quotients de mortalité aux âges les plus élevés  
Source: Vincent, 1950

## Maurice Fréchet entre en scène (lettre du 27 novembre 1950)

Une biographie de Maurice Fréchet (1878-1973) figurant déjà dans *Historia de la Estadística y de la Probabilidad III* (Delta-Madrid 2006, p. 209 et sq.), on se contentera ici de rappeler que ce savant éminent a joué un grand rôle dans les mathématiques pures (il est l'inventeur en 1906 des « espaces abstraits » et donc un précurseur de la topologie générale) mais aussi en statistique. Il s'y illustra par des travaux théoriques mais surtout comme praticien ayant travaillé une multitude de donnes « concrètes ».

Fréchet réagit à la communication faite par Vincent au Congrès de l'IIS de Berne dans une longue lettre datée du 27 novembre 1950. Celle-ci contient quelques roses, mais surtout beaucoup d'épines.



Lettre du 27 novembre 1950, adressée par Maurice Fréchet à Paul Vincent

Les principales critiques de Fréchet portent sur les points suivants:

- l'utilisation du mode (l'âge « normal ») comme valeur centrale de la distribution des durées de vie. Ce reproche est d'ailleurs également adressé à Gumbel.

Fréchet pense, à juste titre, que le mode est très instable; la moyenne (espérance de vie) et la médiane (vie probable) sont de beaucoup préférables.

- Gumbel a tort d'utiliser la loi de Lexis pour représenter la courbe de mortalité au delà de « l'âge normal ». En effet il s'agit d'une loi de Laplace-Gauss tronquée ; or les propriétés mathématiques sur lesquelles est fondée la loi normale impliquent qu'il s'agit de la loi dans sa totalité, avec notamment sa symétrie.
- Vincent confond parfois la distribution empirique des observations qui, elle, est toujours à support borné avec la distribution théorique d'ajustement pour laquelle cette condition (support borné) n'est en rien nécessaire.
- Et par conséquent Vincent a tort de croire en l'existence d'un âge maximum fixe et absolu (pour une population donnée, à une époque donnée) et de refuser la possibilité des durées de vie très grandes, mais avec des probabilités très petites, donc négligeables en pratique.
- Vincent n'aurait pas du critiquer, comme il l'a fait, les données démographiques dont Gumbel s'est servi. L'opinion de Fréchet est au contraire que ces statistiques (suédoises, suisses, américaines) sont très sûres. Et l'allusion de Vincent aux statistiques produites en URSS (que d'ailleurs Gumbel n'utilise pas) est une méchanceté gratuite.

N.B.

Fréchet lui-même avait, en 1947, proposé pour la courbe de mortalité sur toute la durée de vie (de la naissance à la mort) la formule empirique suivante:

$$\text{Log } q_x = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \dots + \lambda X^6,$$

$x$  étant l'âge,  $q_x$  le taux de mortalité à l'âge  $x$  et  $X = \log(x+a) + b$ .

Cela fait 9 paramètres !

Cette « loi », comme beaucoup d'autres du même genre produites avant elle, n'a connu aucun avenir.

En janvier 1951, Fréchet transmet le texte de Vincent à Gumbel. Celui-ci réagit dans une lettre à Fréchet, datée de New York le 24 avril 1951.

Les réponses que fait Gumbel aux critiques de Vincent rejoignent largement celles de Fréchet, dans sa lettre du 27 novembre 1950, ci dessus. Nous ne les reprenons pas.

Il y ajoute que Vincent lui semble n'avoir pas compris le paradoxe du dernier âge.

N.B.

Nous pensons, nous l'avons déjà dit, que cette incompréhension est due notamment à l'ambiguïté du vocabulaire adopté par Gumbel – appeler « dernier âge » le mode de la distribution des plus grands âges au décès ne peut que prêter à

confusion. Rappelons que, théoriquement, 63 % des « plus grands âges » dépassent le « dernier âge ».

D'autre part, Gumbel proteste avec véhémence au fait que Vincent ait affirmé que lui, Gumbel, penserait que les courbes de mortalité en Inde et en Australie obéissent à la loi de Laplace-Gauss. Jamais il n'a écrit une telle sottise: sa seule hypothèse est que les deux courbes sont de même type, par ailleurs quelconque.

A l'appui de sa thèse sur le « paradoxe du dernier âge », Gumbel joint à sa lettre quelques graphiques inédits concernant le phénomène.

Accessoirement, Gumbel pointe quelques grossières erreurs de calcul commises par Vincent. Il souligne enfin que, contrairement à ce qu'affirme Vincent, il n'a jamais prétendu que la « vie sauvage » favorisait une longue existence.

En annexe de sa lettre, Gumbel, recopie un calcul du probabiliste William Feller, qui se trouve à la page 9 du livre *An introduction to probability theory and its applications* (Wiley, 1950). Dans le texte, W. Feller montre par un calcul très simple, mais approximatif, qu'une durée de vie humaine supérieure à 1000 ans, bien que possible, a une probabilité si faible qu'il serait nécessaire que l'histoire de l'humanité ai duré au moins  $10^{10^{34}}$  fois l'âge de la terre ( $10^{10}$  ans environ) pour avoir une chance d'observer une telle durée de vie.

C'est souligner que possibilité théorique peut signifier impossibilité pratique.

N.B.

La même probabilité calculée dans l'hypothèse d'une courbe de mortalité de Gompertz donne des nombres différents, mais qui aboutissent eux aussi à la même conclusion: impossibilité pratique.

Le 7 mai 1950, Fréchet transmet à Vincent cette lettre de Gumbel. Il souligne dans un mot d'accompagnement qu'il approuve entièrement les remarques de Gumbel, et le calcul de Feller, qu'il estime être l'un des meilleurs probabilistes contemporains.

### **Trois scientifiques, trois styles**

Les échanges de lettres entre Paul Vincent, Emil J. Gumbel et Maurice Fréchet font apparaître l'agressivité du premier, l'ouverture du second et la volonté conciliatrice du troisième qui n'entend pas pour autant accepter de compromis sur des travaux scientifiques.

Dans sa lettre du 29 décembre 1950 adressée à Maurice Fréchet, Vincent se montre certain que Gumbel est dans l'erreur:

« Lorsque je vois des scientifiques risquer d'apporter, par légèreté ou par maladresse, le crédit de la science à des idées fausses de cette nature, et de compromettre par là, ou du moins d'entraver tous nos efforts d'éducation du public, la sensation de malaise qui résulte, pour moi, de notre impuissance en matière de diffusion des connaissances démographiques, se double volontiers d'une certaine irritation. »

Corrélativement, n'étant traversé par aucun doute, il est convaincu d'avoir pleinement raison:

« Mais revenons-en à ma supposition: j'ai découvert le paradoxe du dernier âge, et je constate qu'il aboutit à des conséquences diamétralement opposées à celles que j'attendais a priori, c'est à dire à celles que m'avait suggérées mon "intuition", mon "bon sens" de démographe –je vous laisse le choix du terme, étant entendu qu'il doit exprimer le résultat inconscient d'une assez longue expérience, la connaissance quelque peu instinctive qu'on acquiert par la fréquentation quotidienne des phénomènes d'un genre déterminé (ici: démographiques)-. [...] »

Vincent reconnaît au demeurant n'avoir pas ménagé Gumbel:

« Ceci dit, je regrette d'avoir paru, à l'occasion de critiques que je voulais partielles et limitées, traiter "dédaigneusement" des travaux de E. Gumbel. Si telle est l'impression qui ressort de la lecture de mon article, je vous demande de bien vouloir, à la lumière de cette lettre, excuser ma maladresse. »

Le ton mesuré de Gumbel, dans la lettre qu'il adresse à Maurice Fréchet, le 24 avril 1951, tranche singulièrement avec celui de Vincent:

« J'ai étudié à fond sa lettre [celle de Paul Vincent]. Je trouve qu'il n'y a rien d'offençant [sic] dans ce qu'il dit, et les objections qu'il me fait méritent attention. »

Maurice Fréchet, quant à lui, entend bien jouer un rôle de médiateur mais sans pour autant s'effacer, comme on peut le voir dans sa lettre du 7 mai 1951, adressée à Vincent:

« Si j'ai l'assurance que cela peut clore la discussion publique, je me propose d'écrire un article (ou une communication au Congrès de New-Delhi) où j'essaierai de concilier vos deux points de vue... et le mien propre. »

Nous n'avons cependant pas trouvé trace d'un écrit de Fréchet clôturant le débat.

\*

\* \*

Comme Maurice Fréchet, Emil J. Gumbel estimait qu'il fallait « éviter une polémique » sur cette question de la mortalité aux grands âges et d'un âge limite. Paul Vincent ne cherchait semble-t-il pas vraiment à polémiquer, tant il pensait que Gumbel avait tort et que les conclusions de celui-ci étaient inacceptables.

La critique par Vincent des travaux de Gumbel fut publique, puisqu'il s'y livra lors du Congrès de Berne de l'Institut international de statistique, en 1949. Mais la controverse elle-même s'est cantonnée à des échanges de lettres entre les trois scientifiques ; elle est inconnue des chercheurs de l'époque et l'est a fortiori de ceux d'aujourd'hui, bien que ces débats sur la « durée extrême de la vie », se fondant selon les cas sur une approche statistique ou probabiliste de la mortalité, conservent toute leur actualité.

## Références

### (hors lettres échangées entre Vincent, Gumbel et Fréchet)

GUMBEL, E. J. (1937), *La durée extrême de la vie humaine*, Collection « Actualités scientifiques et industrielles », Hermann et C<sup>ie</sup> Editeurs, Paris.

VINCENT, P. E. (1950), « Quotients de mortalité aux âges élevés. Tables de mortalité des vieillards », Congrès de Berne de l'IIS, 377-388.

- (1951), « La mortalité des vieillards », *Population*, 6<sup>e</sup> année, n<sup>o</sup>2, 181-204.

## CAPÍTULO 4

# El concepto de desigualdad en Vilfredo Pareto (1848-1923)

JESÚS BASULTO SANTOS  
J. JAVIER BUSTO GUERRERO  
ROCÍO SÁNCHEZ LISSEN  
Universidad de Sevilla

### Introducción

Vilfredo Pareto desarrolló su concepción de desigualdad de las rentas en el Tomo II del *Cours d'Économie Politique*, en el *Manuale di Economia politica* y en la traducción al francés de este manual.

En el *Cours*, Pareto propone un criterio general para medir la desigualdad de las rentas, y habla de “disminución de la desigualdad de las rentas” al comparar, según su criterio, dos distribuciones de rentas. Esta expresión creó tanta ambigüedad y confusión entre sus coetáneos que le conduce a cambiarla por “disminución de la desigualdad de la proporción de las rentas” (Pareto, 1909).

Es L. Von Bortkiewicz (1868-1931) quien, desde la estadística matemática, formaliza el criterio general de Pareto comparando dos funciones de distribución, donde una de ellas no es superior a la otra. Esta formalización es la que en nuestros días se denomina “dominancia estocástica de grado uno”.

Al comparar dos distribuciones de renta, Pareto observó, en algunos casos, que las curvas que representaban esas distribuciones se cortaban en un punto de renta, de forma que desde la renta mínima hasta ese punto la desigualdad disminuía y desde el punto de corte hasta la renta máxima la desigualdad aumentaba. Pero ese punto de corte era una renta muy alta y, además, la proporción de individuos que detentaban una renta menor que la renta de corte superaba el 90% de la población considerada. De ahí concluía que su criterio de desigualdad seguía siendo válido para casi todo el rango de las rentas.

Así mismo, estudia las consecuencias derivadas de la aplicación de su criterio de desigualdad a la ley de rentas de tipo II, donde analiza como influye la variación de la desigualdad en la variación de las rentas mínima y media, y recíprocamente.

Se organiza este trabajo comenzando con un perfil biográfico de V. Pareto. En la sección 3) se estudia el concepto de desigualdad. Para una mejor comprensión de las secciones posteriores se describe la ley de las rentas. En la sección 5) se analizan las consecuencias económicas derivadas de la aplicación del criterio de desigualdad a la ley de tipo II. Las consecuencias generales de la aplicación del criterio de desigualdad se exponen en la sección 6) y son ilustradas con los ejemplos de la última sección.

## Perfil biográfico de V. Pareto

En la biografía sobre Pareto realizada por el alemán Franz Borkenau (1941, p.1)<sup>1</sup>, este autor señalaba que en la vida de Pareto “no hubo acontecimientos

<sup>1</sup> La relación de trabajos sobre Pareto en forma de biografía es muy amplia. Por orden cronológico cabe señalar los siguientes:

1923. M. Pantaleoni: “Vilfredo Pareto”. *Economic Journal*, 33.

1924. M. Pantaleoni: “In occasione della morte di Pareto riflessioni. *Giornale degli economisti*, 34.

1928. G.H. Bousquet: *The work of Vilfredo Pareto*. Minneapolis.

1928. G.H. Bousquet: *Vilfredo Pareto, sa vie et son oeuvre*. Paris.

1936. F. Borkenau: *Pareto*. London. Edición en castellano del Fondo de Cultura Económica, 1941.

1938. L. Amoroso: “Vilfredo Pareto”. *Econometrica*, 6.

1949. J.A. Schumpeter: “Vilfredo Pareto (1848-1923)”. *Quarterly Journal of Economics*, 63.

1949. J.A. Schumpeter: Vilfredo Pareto. En *Ten great economists. From Marx to Keynes*. Edición en castellano de Bosch, traducida por Fabián Estapé, 1955.

1951. J.M. Zumalacárregui: *Vilfredo Pareto. 1848-1923*. Consejo Superior de Investigaciones científicas.

1963. G. Busino: “Pareto e le autorità di Losanna”. *Giornale degli economisti*, 22.

1968. M. Allais: *Pareto, Vilfredo: contributions to economics*. En *Encyclopedia of the social sciences*, New York.

1987. G. Busino: *Pareto, Vilfredo (1848-1923)*. The New Palgrave. Macmillan.

1998. A.L. Feldman: *Pareto optimality*. The New Palgrave. Dictionary of economics and the law Macmillan.

extraordinarios”; sin embargo, difícilmente pueda encontrarse un economista tan polifacético en sus conocimientos y tan bien formado como Vilfredo Pareto, de ahí que en conjunto pueda calificársele de economista extraordinario.

Pareto nació en París aunque toda su familia era genovesa. El motivo de ello fue que su padre, el marqués Raffaele Pareto, ingeniero agrónomo de profesión, era seguidor de Mazzini<sup>2</sup>, - por tanto de ideas liberales y republicanas-, y se exilió de manera voluntaria a Francia por motivos políticos en 1835, donde posteriormente contrajo matrimonio con la francesa María Mettenier. Trece años después, el 15 de julio de 1848 nació Pareto, recibiendo los nombres de Vilfredo Federico Dámaso. Como más adelante se verá, estas circunstancias políticas relacionadas con su padre, empezaría a influir notablemente tanto en su trayectoria personal como académica, mostrándose desde el principio contrario a los ideales del movimiento mazzinista, y provocando en él luchas interiores de forma continua.

Como ha señalado G. Busino (1987, p. 799), en 1852 Raffaele Pareto, acogido a un indulto, regresó a Italia con su familia donde ejerció como profesor de francés, impartiendo también clases de economía agrícola y de contabilidad. Vilfredo Pareto completó en Italia su formación, logrando graduarse en ciencias físicas y matemáticas en 1867, además de estudiar italiano, latín y griego. En 1869, con 21 años, finalizó la carrera de ingeniero en el Politécnico de Turín, doctorándose con un trabajo sobre el equilibrio de los cuerpos sólidos, mostrando así un temprano interés por las cuestiones de equilibrio<sup>3</sup>. Inmediatamente comenzó a trabajar en una Compañía de Ferrocarriles en Florencia, empleo que ocupó entre 1870 y 1873, donde adquirió una amplia experiencia profesional, administrativa y económica, permitiéndole conocer más de cerca las condiciones de vida de la clase obrera que allí trabajaba, lo que justificaría además su preocupación por el concepto de “desigualdad” como más adelante se verá. En 1873 fue nombrado director de una gran empresa siderúrgica en Vald’Arno, donde permaneció hasta 1880. En estos años colabora, entre otras publicaciones, en *L’Economista* (Florencia), así como en el *Journal des Economistes* (París) y en el *Giornale degli Economisti*.

En Florencia, que era por entonces la capital italiana, Pareto asistía a diversas tertulias, donde coincidía con políticos, artistas y escritores<sup>4</sup>, lo que le animó a

---

<sup>2</sup> Giuseppe Mazzini (1805-1872), fue un político revolucionario genovés defensor del carbonarismo, una ideología nacida en Italia a principios del siglo XIX, que posteriormente se extendió a Francia, y cuyas principales ideas se centraban en combatir el absolutismo e implantar los principios de la revolución francesa. Mazzini fue el fundador de *La Joven Italia* en 1831 y de *La Joven Europa* en 1834, que puede considerarse un antecedente de la unidad europea.

<sup>3</sup> El trabajo llevaba por título *Principi fondamentale della teoria dell’elasticità dei corpi solidi e ricerche sull’integrazione delle equazioni differenziale che ne definiscono l’equilibrio*.

<sup>4</sup> Según señala Busino (1987, p. 800), fue a través de las tertulias organizadas por la esposa del alcalde de Florencia Ubaldino Peruzzi, como Pareto se incorporó a esos debates, poniendo como modelos a seguir a Cobden, Gladstone y Molinari, claros defensores de la doctrina librecambista en aquellos momentos.

publicar artículos y folletos y a polemizar en conferencias y mítines sobre el debate entre librecambio y proteccionismo vigente entonces, en los que se mostraba partidario de la libertad económica, convencido de su importancia para la prosperidad de un país, y criticando con dureza las medidas proteccionistas aplicadas por el gobierno italiano. Buena muestra de ello fue su participación en la fundación de la *Adam Smith Society*. Esa fuerte oposición al gobierno<sup>5</sup> y a sus medidas, llevó a Pareto a vaticinar la decadencia económica de Italia, una situación que finalmente no llegaría a producirse, lo que motivó en él una violenta reacción, llevándole a una severa autocritica que le condujo a indagar en las ideas marxistas, con la publicación en 1893 de una introducción a *El Capital* (resumido por Deville, y acompañado de un apéndice realizado por Paul Lafargue)<sup>6</sup>, -edición posterior a otra aparecida en 1883 con motivo de la muerte de Marx-, y más adelante con la publicación en dos volúmenes, en 1903, de *Les Systèmes Socialistes*. Posteriormente, otra de las consecuencias de esa autocritica de Pareto, fue el análisis que realizó de las luchas sociales, a través de la llamada circulación cíclica de las elites, un término que se puede identificar con el de minoría dominante en una sociedad. Estas aportaciones de Pareto desembocarían en la publicación, en 1916, de su conocido *Tratado de Sociología*, que incluye la llamada “teoría de la circulación de la elites” la cual, según señaló Mariano Sebastián (1949, p. 471), es “una especie de mecánica social de sentido fatalista que va eliminando los elementos superiores de la vida social a un ritmo más o menos rápido”. El estudio de la sociología ha de entenderse en Pareto como indispensable para conocer el comportamiento humano y proporcionar a la Economía una base de estudio más sólida (Busino, 1987, p. 802).

A finales de la década de los 70 del siglo XIX, se puede decir que Pareto había completado con excelente aprovechamiento una formación de carácter multidisciplinar, enriquecida con su trabajo profesional como ingeniero, que le había permitido viajar y conocer ampliamente la realidad económica de varios países europeos, por lo que había abonado el terreno para comenzar su labor como teórico de la economía. Se trataba por tanto, de un proceso que iba desde la economía aplicada a la teoría económica, o como también señaló Zumalacárregui (1951, p. 21), “de abajo arriba”. Ese interés que empezaba a mostrar por la ciencia

---

<sup>5</sup> Fue durante la segunda mitad de los años 70, cuando el líder del partido de izquierda, Depretis, Primer Ministro italiano, aglutinó a los grupos políticos del “Risorgimento” a través de una táctica parlamentaria denominada “transformismo”, que consistía en concederles subvenciones estatales y empleos lucrativos, entre otras medidas, cuyas consecuencias podrían ser la incompetencia y la corrupción.

<sup>6</sup> Esta obra fue traducida al español en 1932 con el título de *El Capital, resumido por Gabriel Deville. Nueva traducción española precedida de un estudio crítico por Vilfredo Pareto. Seguida de un apéndice por Pablo Lafargue*. Madrid, Francisco Beltrán. Por su parte Paul Lafargue, como es sabido yerno de K. Marx, huyó de París ante la represión que estaba sufriendo la Comuna de esa ciudad y se instaló en Madrid.

económica, se intensificó aún más al conocer a Maffeo Pantaleoni en 1890<sup>7</sup>, quien le aconsejó que estudiara a fondo la obra de Walras, *Elementos de Economía política pura*. Además, fue Pantaleoni quien intercedió para que Pareto ocupara en 1894, la cátedra que Walras había dejado vacante por su jubilación en la Universidad de Lausana. A partir de ese momento, comienza Pareto su labor de publicación como teórico de la economía. Su obra científica más relevante, se concentra en un periodo relativamente corto de tiempo (unos 23 años), comprendido entre 1896, cuando publica en Lausana *La courbe des revenus*, y 1919, año de la publicación en francés de su conocido *Traité de sociologie générale*. En el ámbito de la teoría económica, Pareto ha destacado por la publicación de su *Cours d'économie politique* en 1896 (tomo I) y en 1897 (tomo II). Asimismo cabe señalar la aparición en italiano unos años después de su *Manuale d'economia politica* en 1906, que fue traducido al francés y publicado en 1909 en versión revisada y ampliada, con un apéndice matemático.

Para valorar en conjunto la obra de Pareto, podemos acudir a la síntesis que hizo Schumpeter en su *Historia del análisis económico* (2004, <1954>, p. 819), al señalar que el ámbito de influencia internacional de Pareto se concretaba en cuatro principales aspectos, los cuales pueden resumirse en tres: la sociología, la llamada “ley de Pareto” sobre la distribución de la renta y sus aportaciones como teórico puro, con especial referencia a su teoría del valor, la cual perfeccionó respecto a la de los marginalistas Jevons y Walras. En cuanto a esto último cabe destacar la sustitución del concepto de “utilidad” por el más amplio de “ofelinidad”, derivado del griego, con el que se refería a la propiedad que tiene un bien para favorecer el desarrollo y la prosperidad de un individuo. Asimismo, desarrolló la teoría del equilibrio estático en el mercado de bienes, con la determinación simultánea de las cantidades y precios de todos los bienes intercambiados en el mercado. Tampoco podemos olvidar la contribución de Pareto a la “Nueva Economía del Bienestar”, campo en el que destacó por su conocido concepto de “óptimo de Pareto”, que abordaba el problema de la máxima satisfacción colectiva.

Centrándonos ahora en la denominada “ley de Pareto”, cabe señalar que tuvo su origen en un artículo publicado por su autor en 1895 en el *Gionarle degli Economisti*, al que siguió el ensayo *La courbe des revenus*, aparecido en 1896 y fue analizado más a fondo en el volumen II de su *Cours* (apartados 957-65), así como en el capítulo VII del *Manuel* (apartados 2-31), dedicado a la población. Como señalaba el propio Pareto en el prólogo de su *Cours*, para explicar el sentido de esa

---

<sup>7</sup> Poco antes de conocer a Pantaleoni, Pareto se había casado a finales de 1889 con la condesa de origen ruso Alessandrina Bakounine, aunque su matrimonio no fue afortunado y terminó en 1901. Un año después conoció a la francesa Jane Regis, con la que vivió el resto de sus días en la villa de Celigny, cerca de Lausana, y con la que se casó dos meses antes del fallecimiento de Pareto ocurrido en 1923. El motivo de este retraso fue que por ser italiano Vilfredo no podía divorciarse, por lo que decidió nacionalizarse en el Estado Libre del Fiume, y conseguir así el divorcio de la condesa rusa (Cabrillo, 2006, p. 113).

ley: “el examen de los datos proporcionados por la estadística nos ha revelado que la curva que representa la distribución de la riqueza toma una forma cuya expresión matemática es muy sencilla y que es aproximadamente la misma para los distintos países de los que tenemos informes. No es más que una ley empírica, pero es importante y hemos hecho de ella la base de nuestra teoría de la distribución” (Pareto, 1896, p. IV).

Como es sabido esta “ley” no ha estado exenta de polémica y la primera de ellas no se hizo esperar, cuando Edgeworth, al publicar en 1896 una reseña de ese primer artículo de Pareto en el *Journal of the Royal Statistical Society*, señalaba que Pearson se había adelantado a Pareto y había estimado una función de distribución de las rentas similar a la paretiana. Por su parte, Schumpeter (1955, p. 155) se refirió a las dos clases de problemas que planteaba esa “ley”: primero la cuestión de la aplicabilidad y segundo la interpretación, al admitir que la distribución de la renta había sido bastante estable a lo largo del tiempo. Posteriormente aparecieron algunas otras polémicas, pero la que más nos interesa destacar aquí es la que mantuvo con G. Sorel, la cual trasciende de los campos económico y estadístico, para abordar aspectos sociales y políticos.

## **El concepto de desigualdad en Vilfredo Pareto**

El estudio de la desigualdad, tomando como base los datos estadísticos de las rentas y de los patrimonios, ha oscilado en apoyo de dos tesis diametralmente opuestas: la primera tesis, sostenida por autores de la escuela liberal, deseaba mostrar la tendencia hacia una menor desigualdad de las condiciones económicas de los individuos; la segunda tesis, sostenida por autores de la escuela socialista y opuesta a la anterior, deseaba mostrar que en la sociedad capitalista las desigualdades económicas se agudizaban en el transcurso del tiempo.

La referencia tomada por Pareto, como punto de partida de su concepción de la desigualdad, es la crítica que Leroy-Beaulieu hace en la introducción de su libro, *Essai sur la repartition des richesses*, a las posiciones mantenidas por el socialista alemán Ferdinand Lasalle en su carta al Comité Central para la convocatoria de un Congreso General de los trabajadores alemanes en Leipzig. El texto de Leroy-Beaulieu es el siguiente:

“Los hechos que hemos reunido rápidamente en esta introducción demuestran con una irresistible evidencia que todas las clases de la nación han participado del progreso general, que, en particular, la clase obrera se ha beneficiado en una triple forma de un crecimiento de su bienestar material, de un crecimiento de la seguridad y de una mejora de su tiempo libre. Se examinará, en el curso de esta obra, si es verdad que los ricos se hacen más ricos; pero desde este momento se puede afirmar que es falso que los pobres se hagan cada día más pobres. Sin embargo, las mejoras parciales y graduales que acabamos de describir no conmueven a los apóstoles de

las reivindicaciones populares. Éstos hablan desde la tribuna de la soberbia cuando califican estos progresos de mezquinos e insignificantes. Para ellos, la palabra pobreza no tiene sentido absoluto; indica simplemente una relación entre los medios de disfrute que tiene un individuo y los medios de disfrute que tienen otros miembros de la sociedad. La pobreza, no es la falta de recursos para luchar contra el hambre, contra el frío, contra la enfermedad; la pobreza, es el estado de todo hombre que no puede procurarse todos los disfrutes que cualquiera de sus semejantes se da. Así un obrero bien alimentado, bien vestido, bien alojado, confortablemente amueblado, que tiene algún depósito importante en la caja de ahorros y valores mobiliarios en su cartera, que va el domingo o el lunes en tranvía a pasar el día en el campo y vuelve a la noche para asistir desde lo alto de las plantas superiores a las representaciones de un teatro popular, este obrero se declara pobre porque no tiene ni palacete, ni servicio doméstico, ni coche, ni caballos, ni palco en los grandes teatros.”(Leroy-Beaulieu, 1881, pp. 43-44).

Del texto que se acaba de citar se desprende que Leroy-Beaulieu sostiene un concepto de pobreza en sentido absoluto, es decir, habrá una mejora de las condiciones de la clase obrera si su situación actual ha mejorado respecto a tiempos pasados. Por el contrario, la posición sostenida por F. Lasalle es que la desigualdad debe ser medida relacionando sus condiciones actuales con las condiciones en las que viven el resto de las clases, cuyo nivel de renta está por encima de una renta que permita vivir según las necesidades habituales de ese momento. En este sentido, Leroy-Beaulieu, cita, traduciendo del alemán al francés, el texto de Lasalle al que está aludiendo, que dice así:

“Fíjense bien en mis palabras, señores. Puede ocurrir por las razones indicadas que el mínimo necesario de existencia y, por consiguiente, la situación de la clase obrera si se compara la de una generación con la anterior, haya mejorado. Si esto ha ocurrido efectivamente, si realmente el conjunto de la situación de la clase obrera ha mejorado en el curso del tiempo, señores, es una cuestión muy difícil, muy complicada, que implica demasiada ciencia para que hubiesen sido capaces de resolverla, incluso aproximadamente, quienes pretenden distraerles al contarles cuál era el precio del algodón en el último siglo y cuanto tejido de algodón usan ustedes hoy en día, y recorriendo otros lugares comunes análogos que se pueden leer en el primer manual que se tenga a mano.....

Cuando ustedes hablen de la situación de la clase trabajadora y de la mejora de su suerte, deben hablar de su situación comparada con la de sus conciudadanos en el presente, comparada en consecuencia con la medida media de las costumbres en los tiempos actuales. Y si quieren distraerles mediante pretendidas comparaciones de su situación con la situación de los trabajadores en siglos pasados.....

Cada satisfacción humana depende siempre y solamente de la relación de los medios con las necesidades que se han convertido en habituales en un momento dado, o lo que es lo mismo, de lo superfluo de los medios por encima del límite

más bajo de las necesidades que se han convertido en habituales en ese momento. Cada aumento del mínimo de las necesidades habituales aporta con él sufrimientos y privaciones que los tiempos pasados no habían conocido. ¿Qué privación experimenta el Botokoudo si no puede comprar jabón?, ¿el salvaje antropófago si no tiene vestimenta adecuada? ¿Qué privación experimentaría el obrero que antes del descubrimiento de América no tuviera tabaco para fumar? ¿Qué privación sentiría el obrero antes del descubrimiento de la imprenta si no pudiera procurarse un libro útil?.....

Todo sufrimiento y toda privación humana, del mismo modo que toda satisfacción humana, y como consecuencia también la situación de cada parte de la humanidad, no pueden medirse más que por comparación con la situación en la que se encuentran otros hombres del mismo tiempo en relación a la media habitual de las necesidades. La situación de cada clase tiene siempre como única medida la situación de las otras clases en el mismo tiempo.

Cuando se compruebe que el nivel de las condiciones necesarias de la existencia se han elevado a lo largo del tiempo, que satisfacciones antes desconocidas se han convertido en necesidades habituales y que con ellas han sobrevenido privaciones y sufrimientos antes desconocidos, vuestra situación humana en tiempos diferentes sigue siendo más o menos la misma, a saber: consiste en la oscilación alrededor del límite extremo de las necesidades habituales de la vida en cada tiempo, tanto si se elevan un poco por encima de este límite, como si permanecen un poco por debajo....

Su situación como hombres pues sigue siendo la misma, ya que su situación como hombres no se mide comparativamente con la situación del animal en la selva virgen, o con la del negro africano, ni con la del siervo de hace doscientos años o incluso del de hace ochenta años; tiene que ser medida con sus compañeros de humanidad, con la situación de otras clases del tiempo que les ha tocado vivir<sup>8</sup>.”

Es necesario subrayar que Lasalle, en este texto, no solo propugna una medida relativa de la desigualdad, sino, además, sostiene que la renta mínima (“mínimo de subsistencia digna”, lo que el denomina necesidades habituales en cada época) es una cantidad variable en el curso del tiempo.

Pareto, después de establecer su ley de las rentas, en el tomo II del *Cours d'Économie Politique*, trata de fundamentar su definición y concepción de la desigualdad, argumentando como sigue:

“Para estudiar el reparto de las rentas, es necesario considerar el fenómeno en su conjunto. El aumento de las grandes fortunas no indica un aumento general de la

---

<sup>8</sup> *Offenes Antwortschreiben an das Central-Comite zur Berufung eines Allgemeinen Deutschen Arbeiter Congress zu Leipzig. Págs. 15-18.* Traducción del alemán al francés de Leroy-Beaulieu. Nosotros hemos traducido al español el texto en francés.

riqueza, como el aumento del número de centenarios no significa un aumento de la vida media. Del mismo modo, el aumento del número de personas absolutamente miserables no indica un empobrecimiento general del país.

Se confunden a menudo dos cosas completamente diferentes: la disminución de la desigualdad de las fortunas y la disminución del pauperismo. Mientras que la desigualdad de las rentas depende de la parte descendente de la curva de las rentas, el pauperismo depende de la distancia entre la vertical ascendente de la curva de las rentas y el eje de ordenadas<sup>9</sup>. Una población sin pauperismo corresponde a una curva de las rentas con la parte ascendente alejada del eje de ordenadas y la parte descendente con una pequeña pendiente indica una gran desigualdad de las rentas. Cuando la curva de las rentas tiene su parte ascendente muy cerca del eje de ordenadas y la parte descendente tiene una gran pendiente, estamos en el caso de una población con poca desigualdad de las rentas y un gran pauperismo.

Una población con poca desigualdad en las rentas y un pauperismo intenso es puramente hipotética. No encontramos ejemplos de dicha población en la realidad.

¿Pero, cuál es el verdadero significado de los términos: menor desigualdad de las rentas, o de los que se emplean más o menos en el mismo sentido: menor desigualdad de las fortunas, menor desigualdad de las condiciones?

Si se tratara de una igualdad completa de las fortunas o de las condiciones, no habría equívoco posible. Pero uno se puede acercar a este estado de dos maneras esencialmente diferentes: uno se aproxima a ello, tanto si los ricos se convierten en pobres como si los pobres se convierten en ricos<sup>10</sup>. Son dos fenómenos diferentes y, si se tratara de una ciencia positiva, donde los hechos lo son todo y las palabras nada, no dudaría en designar mediante términos diferentes cosas tan diferentes. Pero la economía política no es todavía, a menudo, más que un género literario. En ella se da, en detrimento de los hechos, una gran importancia a las palabras. Se discute pues para saber a cuál de los dos fenómenos indicados debe ser adjudicada la denominación de menor desigualdad de las fortunas” (Pareto, 1897, § 964, p. 318).

Después de un examen minucioso de la cuestión, Pareto llega a la conclusión siguiente:

<sup>9</sup> Nosotros representamos la curva de las rentas sobre el eje de abscisas, mientras que Pareto lo hace sobre el eje de ordenadas.

<sup>10</sup> Sobre esta idea vuelve a insistir en la edición italiana del “Manuale”, y dice: “...la renta puede tender a la igualdad de dos modos diferentes, sea porque las rentas mayores disminuyen, sea porque las rentas menores crecen...” (Pareto, 1906, § 24, p. 371).

“En general, cuando el número de personas que tienen una renta inferior a  $x$  aumenta<sup>11</sup> en relación al número de personas que tienen una renta superior a  $x$ , diremos que la desigualdad disminuye” (Pareto, 1897, p. 320).

Tal parece ser lo que resulta de la más clara de las disertaciones de los escritores más notables; pero Pareto no se hace mucha ilusión sobre el valor de esta definición y en una carta dirigida a Sorel, a propósito de la controversia mantenida con éste, escribe:

“El término *menor desigualdad de las condiciones* no me parece, al igual que a usted, indicar más que lo que se ha visto. De buena gana lo habría sustituido por otro término; pero ya se me ha reprochado bastante la desdichada ofemilidad y he querido evitar nuevas logomaquias a mis críticos. Al menos, he tenido a bien explicar qué era lo que quería decir con ese término”. (Sorel, 1987, p.586).

La ambigüedad y confusión de la expresión “disminución de la desigualdad de las rentas” es, también, abiertamente reconocida por Pareto en su *Manuel d'Économie Politique* (1909, p.389). Una síntesis de las posiciones mantenidas por los distintos autores de esa época aparece en (Bresciani-Turroni, 1907, sec. 4), citado por Pareto a pié de página. Por ello Pareto propone:

“Emplearemos pues una terminología todavía bastante imperfecta, y designaremos por *disminución de la proporción de las rentas* un cierto fenómeno que vamos a definir”. (Pareto, 1909, p. 389).

Para ilustrar el nuevo término introduce el siguiente supuesto empírico:

“Sea una colectividad A formada por un individuo que tiene 10.000 francos de renta y por nueve individuos que tienen 1.000 francos de renta cada uno de ellos; sea otra colectividad B formada por nueve individuos que tienen cada uno 10.000 francos de renta y de un individuo que tiene solamente 1.000 francos de renta. De momento llamamos “ricos” a los individuos que tienen 10.000 francos de renta, y “pobres” a los individuos que tienen 1.000 francos de renta. La colectividad A contiene un rico y nueve pobres; la colectividad B contiene nueve ricos y un pobre.

El lenguaje vulgar expresa la diferencia entre A y B, diciendo que la desigualdad de las rentas es más grande en A, donde hay un único rico sobre diez individuos, que en B donde por el contrario hay nueve ricos sobre diez individuos. Para evitar todo equívoco, diremos que al pasar de A a B hay una disminución de la proporción de la desigualdad de las rentas”. (Pareto, 1909, pp. 389-390)

A continuación, Pareto introduce una definición más precisa del concepto, advirtiendo sobre la errata de imprenta contenida en el “Cours...”, y dice así:

---

<sup>11</sup> Famosa errata, debe de decir disminuye. Véase edición francesa del “Manuel...” y el párrafo anterior de la misma edición francesa.

“En general, cuando el número de personas que tienen una renta inferior a  $x$  disminuye<sup>12</sup> en relación al número de personas que tienen una renta superior a  $x$ , diremos que la desigualdad *de la proporción* de las rentas disminuye”. (Pareto, § 1909, p. 389).

Pareto es, hasta donde llega nuestro conocimiento, el primer autor que formaliza matemáticamente la idea de desigualdad de las rentas. La formalización matemática de este concepto, pensamos, puede aclarar dudas y eliminar confusiones, puesto que el lenguaje matemático ayuda a eliminar las ambigüedades del lenguaje verbal. Sea  $N_x$  el número de individuos que poseen una renta mayor o igual  $x$ , y  $N_h$  el número de individuos que poseen una renta mayor o igual que  $h$ ,  $h > 0$ , la renta mínima. Se define

$$(1) \quad u_x = \frac{N_x}{N_h}, \quad \text{para todo } x \text{ con } x > h.$$

“Siguiendo la definición que hemos dado, la desigualdad *de la proporción* de las rentas irá disminuyendo cuando  $u_x$  crezca”. (Pareto, 1897, § 965, p. 320, nota pie de página).

En efecto, si  $u_x$  crece  $N_x$  debe crecer ( $N_h$  es constante, el número total de individuos considerados, la población). En consecuencia, el número de individuos con una renta inferior a  $x$ ,  $N_h - N_x$ , debe disminuir y por ello disminuye la desigualdad *de la proporción* de las rentas. El razonamiento recíproco se deja al lector.

Dos observaciones importantes deben ser hechas por lo que se refiere a la definición de la desigualdad *de la proporción* de las rentas y su correspondiente fórmula matemática (1):

- i) *Se trata de un concepto general que se puede aplicar cualquiera que sea la distribución estadística que sigan los datos. Si  $F(x)$  es la función de distribución estadística que siguen los datos entonces  $u_x = 1 - F(x)$  es la función de supervivencia de la distribución<sup>13</sup>.*
- ii) *Otra cuestión completamente diferente son las consecuencias y problemas planteados por la concreción de la fórmula (1) cuando se supone que los datos siguen la ley de las rentas de Pareto. Este es el asunto que desarrollamos en las secciones que siguen.*

<sup>12</sup> En el *Cours*, § 964, se lee: aumenta. Es una errata de imprenta, que hemos corregido inmediatamente después de la publicación del *Cours*. Nota de pie de página de Pareto.

<sup>13</sup> La idea de considerar la ley de Pareto como una ley aleatoria aparece en (Bortkiewicz, 1931).

## La ley del reparto de las rentas de V. Pareto

Para elaborar su ley, Pareto, toma como punto de partida el análisis de los datos de las declaraciones de los contribuyentes para el impuesto de la renta, y argumenta, que a pesar de la incertidumbre de esas declaraciones, es la base más segura de la que se dispone, después de discutir en los párrafos precedentes (950-956) sobre la fiabilidad y adecuación de otros datos relativos a la renta. Esta labor de recogida de los datos se inicia en 1893, una vez que sucede a Leon Walras en la cátedra de Economía Política de la Universidad de Lausanne, y recopila datos de Francia, Inglaterra, Irlanda, Bélgica, Suiza, los Estados Unidos de América, Prusia... Tomando, en un principio, los datos de las declaraciones de la renta de dos países diferentes socialmente, como lo eran en aquella época Inglaterra e Irlanda (1893-94), razona, como se indica a continuación, con el objetivo de indagar si esas cifras se distribuyen al azar, o se agrupan siguiendo alguna ley<sup>14</sup>.

Adoptando las notaciones de Pareto se indicará mediante  $x$  una cierta renta, medida en las correspondientes unidades monetarias del país de que se trate; se indicará mediante  $N_x$  el número de contribuyentes que tienen una renta igual o superior a  $x$ . En el plano cartesiano toma sobre el eje de abscisas los logaritmos de  $x$  y sobre el eje de ordenadas los logaritmos de  $N$ . Observa que los puntos así determinados,  $(\log x, \log N_x)$ , tienen una tendencia muy marcada a disponerse en línea recta, e incluso un hecho que Pareto considera más notable: que esas rectas son todas ellas casi paralelas. La ecuación de esta recta puede ser representada por:

$$(2) \quad \log N_x = \log A - \alpha \log x ,$$

lo que da origen a su primera ley de reparto

$$(3) \quad N_x = \frac{A}{x^\alpha} , \quad A > 0, \quad x \geq h, \quad \alpha > 1, \quad h > 0.$$

Cuando nos refiramos a la fórmula anterior (3), hablaremos de ley de Pareto tipo I.

Para estimar los parámetros  $A$  y  $\alpha$  utiliza una interpolación de Cauchy en (2), que dice ser suficiente en una primera aproximación, o incluso un método gráfico mediante papel milimetrado. Añade que la ecuación general de la curva quizás debería ser

<sup>14</sup> Una crítica a la calidad y al uso que hace Pareto de los datos estadísticos se puede ver en (Sorel, 1897, pp. 593-596). La respuesta de Pareto a esta crítica se puede ver en (Pareto, 1965, pp. 42-47).

$$(4) \quad \log N_x = \log A - \alpha \log(a + x) - \beta x ,$$

pero es solamente para el caso del ducado de Oldenburg para el que encuentra un valor de  $\beta$  que no es despreciable y, en general, se tiene simplemente

$$(5) \quad \log N_x = \log A - \alpha \log(a + x) ,$$

que define su segunda ley de reparto

$$(6) \quad N_x = \frac{A}{(x + a)^\alpha} , \quad h + a > 0 .$$

Cuando se trata de la renta total,  $a$  es también, en general, despreciable, muy pequeño, en la mayor parte de los casos, del orden de los errores de observación, lo que conduce a la ecuación (3). Cuando se trata de rentas mobiliarias el parámetro  $a$  no debe ser despreciado, incluso puede adquirir valores bastante considerables.

Cuando nos refiramos a la fórmula anterior (6), hablaremos de ley de Pareto tipo II.

Una vez establecidas las fórmulas anteriores, Pareto se dedica a contrastar las fórmulas con otros datos y llega a las siguientes conclusiones:

- a) Para los casos examinados de Prusia (1876, 1881, 1886, 1893-94, 1894-95), Sajonia (1880, 1886)..., además de los ya citados de Inglaterra e Irlanda, la recta logarítmica se ajusta muy bien, en el sentido de que las desviaciones entre los logaritmos de  $N_x$  teóricos y los correspondientes logaritmos empíricos son muy pequeñas.
- b) Las rectas de los logaritmos empíricos y las rectas ajustadas son casi paralelas. De hecho, observa Pareto, los valores calculados de  $\alpha$  mediante interpolación (la pendiente de las rectas) varían poco, entre 1,13 (Augsburg, 1526) y 1,89 (Prusia, 1852)
- c) De las consideraciones a) y b), concluye Pareto: “Es absolutamente imposible admitir que sean debidos solamente al azar. Hay ciertamente una *causa* que produce la tendencia de las rentas a disponerse siguiendo una cierta curva. La forma de esta curva parece depender de una forma bastante débil de las diferentes condiciones económicas de los países considerados, puesto que los efectos son mas o menos los mismos para países cuyas condiciones económicas son tan diferentes como las de Inglaterra, Irlanda, Alemania, ciudades italianas, e incluso Perú” (Pareto, 1897, § 960, p. 312).
- d) No obstante, el carácter general de la afirmación anterior queda matizada y valorada en su justo término con la siguiente consideración: “...cuando se trata

de leyes puramente empíricas, se debe de ser extraordinariamente prudente. En cualquier caso, las consecuencias que vamos a extraer de esta ley serán siempre válidas, al menos, para los pueblos para los cuales hemos visto que se verifican". (Pareto, 1897, § 960, p. 312).

El enfoque de la ley de reparto de las rentas de Pareto, como se puede observar, se caracteriza por la elección de la variable renta como variable continua, frente a otros autores que toman esta variable como discreta (tramos de renta) y fija su atención en la distribución socioeconómica en su conjunto, frente a la búsqueda de un estadístico numérico que resuma la distribución.

Reproducimos en lo que sigue los razonamientos que hace Pareto en el "Cours" (1897, § 958 y § 961, notas pié de página) para obtener las curvas de frecuencia, el número total de los individuos de la población considerada, la renta total, y la renta media para las leyes de tipo I y II.

El numero de rentas comprendidas entre  $x$  y  $x + dx$ , es

$$ydx = -\frac{dN_x}{dx} dx,$$

es decir, en el caso de la ecuación (3),

$$ydx = \frac{\alpha A}{x^{\alpha+1}} dx,$$

y en el caso de la ecuación (6),

$$ydx = \frac{\alpha A}{(x + a)^{\alpha+1}} dx.$$

En los dos casos la función  $y$ , como se puede observar en las dos ecuaciones que anteceden, es decreciente respecto a  $x$  y tiene por asíntota la dirección positiva del eje de abscisas.

La población es para la ley de tipo I (3),

$$(7) \quad N_h = \frac{A}{h^\alpha}.$$

La población es para la ley de tipo II (6),

$$(8) \quad N_h = \frac{A}{(h + a)^\alpha}.$$

La suma de las rentas entre  $h$  (*renta mínima*) y  $k$  (*renta máxima*) está dada por la ecuación (ley tipo II)

$$R = \int_h^k \frac{\alpha Ax}{(x+a)^{\alpha+1}} dx.$$

Efectuando esta integral, se obtiene

$$(9) \quad R = A \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)(h + a)^\alpha} - A \frac{\alpha k + a}{(\alpha - 1)(k + a)^\alpha}.$$

Teniendo en cuenta (8), la fórmula anterior se puede escribir:

$$R = \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)} N_h - A \frac{\alpha k + a}{(\alpha - 1)(k + a)^\alpha} N_k.$$

Cuando  $\alpha > 1$  y  $k$  es suficientemente grande ( $k \rightarrow \infty$ ), el segundo sumando del miembro de la derecha de la fórmula (9) tiende a cero, por lo que se tiene

$$R = \int_h^k \frac{\alpha Ax}{(x+a)^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)} N_h.$$

Haciendo  $\alpha = 0$  en la fórmula anterior se obtiene el montante de las rentas para la ley de tipo I,

$$(10) \quad R = \frac{\alpha h}{(\alpha - 1)} N_h.$$

El montante de las rentas para la ley de tipo II es,

$$(11) \quad R = \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)} N_h.$$

La renta media<sup>15</sup> para la ley de tipo I es,

$$(12) \quad z = \frac{R}{N_h} = \frac{\alpha h}{(\alpha - 1)},$$

---

<sup>15</sup> Para designar la renta media seguimos la notación empleada por Pareto,  $z$ . Más adelante utilizaremos la letra griega  $\mu$ .

La renta media para la ley de tipo II es,

$$(13) \quad x = \frac{R}{N_h} = \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)}.$$

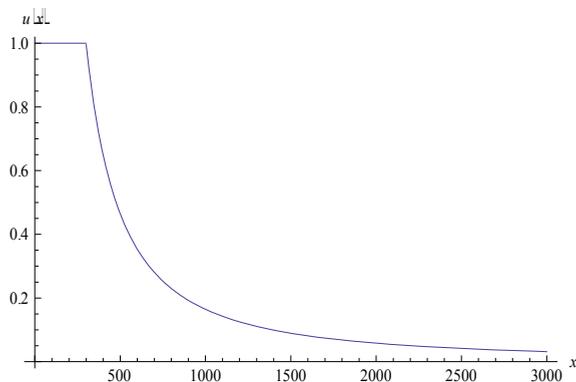
Si suponemos que los datos siguen la ley de las rentas de Pareto, la fórmula de la proporción de la desigualdad (1) se expresará, si tenemos en cuenta (7), para la ley de tipo I por

$$(14) \quad u_x = \left(\frac{h}{x}\right)^\alpha,$$

y para la ley de tipo II, teniendo en cuenta (8), por

$$(15) \quad u_x = \left(\frac{h + a}{x + a}\right)^\alpha.$$

A continuación se muestra la grafica de la ecuación (15) para  $\alpha = 1,5$ ,  $h = 300$ ,  $a = 0$ . Hemos tomado  $u_x = 1$ , para  $0 \leq x < 300$ , renta máxima  $k = 3000$ .



En el apartado c) de esta sección, hemos aludido al hecho de que Pareto consideraba su ley como determinista y no aleatoria. En Bortkiewicz (1931, pp. 222-224) aparece un buen estudio del concepto desigualdad de Pareto y el tratamiento de la ley como aleatoria. En este sentido,  $u_x$  es la función de supervivencia de la ley de Pareto, considerada ésta como aleatoria.

Las funciones de supervivencia y distribución de la ley de tipo I son

$$(16) \quad u_x = 1 - F(x) = \begin{cases} \left(\frac{h}{x}\right)^\alpha, & x \geq h > 0 \\ 1, & 0 \leq x < h \end{cases}$$

y

$$(17) \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{h}{x}\right)^\alpha, & x \geq h > 0 \\ 0, & 0 \leq x < h \end{cases},$$

respectivamente.

Las funciones de supervivencia y de distribución de la ley de tipo II son

$$(17) \quad u_x = 1 - F(x) = \begin{cases} \left(\frac{h+a}{x+a}\right)^\alpha, & x \geq h > 0 \\ 1, & 0 \leq x < h \end{cases}$$

y

$$(18) \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{h+a}{x+a}\right)^\alpha, & x \geq h > 0 \\ 0, & 0 \leq x < h \end{cases},$$

respectivamente, donde el parámetro  $\alpha$  es un número real que verifica que  $h + \alpha > 0$ .

Otra versión de ley de Pareto de tipo II, resulta del cambio de parámetro  $b = h + \alpha$ . Con ello conseguimos un nuevo parámetro positivo, que permite una mejor manipulación de la ley en las secciones que siguen. Entonces la fórmula (18) se expresaría:

$$(19) \quad u_x = 1 - F(x) = \begin{cases} \left(\frac{b}{b + (x-h)}\right)^\alpha, & x \geq h > 0 \\ 1, & 0 \leq x < h \end{cases},$$

Cuando  $b = h$ , se obtiene la ley de tipo I.

La función cuantil es la función inversa de la función de distribución (en el caso continuo), que denominamos

$$Q: u \in [0,1) \rightarrow Q(u) \in [0, \infty), F(Q(u)) = u.$$

Por tanto, la función cuantil para la ley de tipo II es, con el nuevo parámetro,

$$(20) \quad Q(u) = h - b + b(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

## Consecuencias económicas de la ley de Pareto

Estudiamos en esta sección, siguiendo a Pareto (1897, § 965, pp. 320-326), las consecuencias económicas de la aplicación de la ley de las rentas de tipo II a su definición de la desigualdad de la *proporción* de las rentas.

En el “Cours” (obra citada), Pareto estudia las relaciones que se pueden dar entre las variaciones de la renta mínima, las variaciones de la desigualdad de las rentas y las variaciones de la renta media, al comparar dos distribuciones de renta: distribución de renta 1 de parámetros  $\alpha_1, h_1, a_1, b_1$ , función de supervivencia  $u_{1,x}$  y función de distribución  $F_1$ ; distribución de renta 2 de parámetros  $\alpha_2, h_2, a_2, b_2$ , función de supervivencia  $u_{2,x}$  y función de distribución  $F_2$ .

Comienza, pues, enunciando la siguiente proposición que demuestra, recurriendo a las matemáticas, en las notas a pié de página:

“Los efectos siguientes: 1° un aumento de la renta mínima, 2° una disminución de la desigualdad de las rentas, no se pueden producir, sea aisladamente, sea acumulativamente, más que si el total de las rentas crece más deprisa que la población”. (Pareto, 1897, § 965, p. 320).

Son tres las proposiciones implicadas en este texto, que enunciamos separadamente, a saber:

- 1) *Si permanece constante la desigualdad de las rentas y la renta mínima aumenta, entonces la renta media aumenta.*
- 2) *Si disminuye la desigualdad de las rentas y la renta mínima permanece constante, entonces la renta media aumenta.*
- 3) *Si disminuye la desigualdad de las rentas y aumenta la renta mínima, entonces aumenta la renta media.*

Para la justificación de estas afirmaciones, Pareto calcula la diferencial de  $\log u_x$ . Considerando  $u_x$  como función de los parámetros  $h, a, \alpha$ , se obtiene

$$(21) \quad \frac{du_x}{u_x} = \log \frac{h + \alpha}{x + \alpha} d\alpha + \alpha \left[ \frac{1}{h + \alpha} - \frac{1}{x + \alpha} \right] d\alpha + \alpha \frac{1}{h + \alpha} dh.$$

Ahora bien, Pareto calcula la diferencial considerando  $u_x$  como función de los parámetros  $\alpha$  y  $\alpha$ , es decir, toma  $h$ , la renta mínima, constante. Por tanto, obtiene para (21) la expresión

$$(22) \quad \frac{du_x}{u_x} = \log \frac{h + \alpha}{x + \alpha} d\alpha + \alpha \left[ \frac{1}{h + \alpha} - \frac{1}{x + \alpha} \right] d\alpha.$$

Por lo que se refiere a la proposición 1), la hipótesis de que permanece constante la desigualdad de las rentas, significa, que las funciones de supervivencia que está comparando son iguales,  $u_{1x} = u_{2x}$ , y, por tanto, sus funciones de distribución son iguales. En consecuencia, la renta mínima debe ser la misma y no tiene sentido la hipótesis de que la renta mínima aumente. Por otra parte, para justificar esta proposición Pareto utiliza la fórmula (22), que supone  $h$  constante, lo que contradice su hipótesis de que la renta mínima aumenta. Todo ello nos conduce a afirmar que la proposición 1) no es válida<sup>16</sup>.

En cuanto a las proposiciones 2) y 3), la hipótesis de la disminución de la desigualdad significa que las funciones de supervivencia verifican que  $u_{2x} \geq u_{1x}$  y las funciones de distribución  $F_2(x) \leq F_1(x)$ , para todo  $x > 0$  y en algún  $x$  la desigualdad es estricta. Aplicando una integración por partes en la fórmula de la media de las distribuciones, se obtiene  $z_2 \geq z_1$ , es decir la renta media aumenta. Este es un razonamiento general, independiente de la ley que siga la distribución<sup>17</sup>.

En el supuesto de que la renta mínima permanezca constante, es correcta la fórmula (22), y Pareto afirma:

“Si se hace variar a la vez  $\alpha$  y  $a$ , la desigualdad de las rentas disminuirá cuando  $\alpha$  decrezca y  $a$  crezca. Pero si  $\alpha$  crece a la vez que  $a$ , no se puede decir, en general, si la desigualdad de las rentas crece o decrece. Esta desigualdad aumentaría para ciertas rentas y disminuiría para otras.” (Pareto, 1897, p. 321, nota (2)).

Es decir, se trata de dos distribuciones de rentas cuyas funciones de supervivencia se cortan en un punto y no serían comparables.

En el ejemplo siguiente:

	$\alpha$	$h$ , Renta mínima	$a$
1	1.3	100	0
2	1.4	100	10

La función de supervivencia 2 está por encima de la 1 hasta la renta 172 para pasar a situarse por debajo, de la renta 172 en adelante. Así entre la renta mínima, 100, y la renta 172 la desigualdad disminuye; y a partir de la renta 172 la desigualdad aumenta.

A continuación, Pareto trata de probar las proposiciones recíprocas de las anteriores que expresa así:

<sup>16</sup> Para una discusión de la validez de esta proposición véase (D’Addario, 1933, p. 182).

<sup>17</sup> Este resultado se estudia con detalle en la sección siguiente.

“Siempre que el total de las rentas aumente más rápidamente que la población, es decir cuando la media de las rentas aumenta para cada individuo, se puede constatar, separadamente o conjuntamente, los efectos siguientes: 1° un aumento de la renta mínima; 2° una disminución de la desigualdad de la proporción de las rentas”. (Pareto, 1909, § 29, p.392).

Es en el “Cours” donde recurre a las matemáticas para probar estas proposiciones. Para ello considera la renta media (13), a la que esta vez expresa como función de los tres parámetros. Calcula la diferencial de la renta media,

$$(23) \quad dz = \frac{\alpha}{\alpha - 1} dh + \frac{1}{\alpha - 1} d\alpha - \frac{h + \alpha}{(\alpha - 1)^2} d\alpha$$

y enuncia la primera proposición,

“1° Si la desigualdad de las rentas no cambia, es decir si  $dh$  y  $d\alpha$  son nulos,  $dz$  no puede aumentar más que si  $dh$  crece y viceversa. El aumento total de las rentas, en relación a la población, produce pues necesariamente el aumento de la renta mínima y viceversa.” (Pareto, 1897, p. 322, nota (4)).

En la prueba de esta proposición, Pareto vuelve a considerar, pensamos erróneamente, que  $u_x$  es función de los parámetros  $h$  y  $\alpha$  y que la renta mínima no varía. De ahí que al considerar  $dh = d\alpha = 0$ , deduzca

$$(24) \quad dz = \frac{\alpha}{\alpha - 1} dh$$

y entonces si la renta mínima aumenta, la renta media debe aumentar. Es necesario resaltar que en este razonamiento considera, implícitamente, que la renta mínima no varía y, explícitamente, que varía. Por otra parte, de (24) se deduce que si la renta media aumenta, entonces debe aumentar la renta mínima.

La segunda proposición la enuncia así:

“2° Si la renta mínima  $h$  permanece constante, es decir si  $dh$  es nulo, la disminución general de la desigualdad de las rentas se produce cuando  $\alpha$  crece o  $\alpha$  decrece y, entonces,  $dz$  crece. La disminución general de la desigualdad de las rentas no puede ser obtenida más que si el total de las rentas aumenta en relación a la población”. (Pareto, 1897, p. 322, nota (4)).

Se puede observar que esta proposición es un caso particular de las primeras proposiciones. La razón por la que Pareto reitera la misma idea, se debe a que va plantear la inversa de esta proposición:

“La inversa no es cierta, porque el aumento de  $az$  puede producirse cuando  $da$  y  $da$  son positivos, lo que aumenta la desigualdad de ciertas rentas y disminuye la de otras”. (Pareto, 1897, p. 322, nota (4)).

Es decir, que un aumento de la renta media no implica, en general, una disminución de la desigualdad. De hecho, en algunos casos, se puede producir un aumento de la desigualdad de algunas rentas y una disminución de la desigualdad para otras, como se muestra en el siguiente ejemplo:

	$\alpha$	$h$ , Renta mínima	$a$	$z$ , Renta media
1	1,3	100	0	433,3
2	1,4	100	40	450

Puesto que esta proposición inversa, con carácter general, no es cierta, Pareto recurre a otro tipo de argumentos con el fin de demostrar la proposición 2º, y continúa diciendo:

“Pero la ecuación (23) hace ver que es necesario, para ello, admitir que  $a$  varíe poco, lo que excluye, al menos en general, las rentas totales, para las cuales, como se ha visto,  $a$  es nulo o muy pequeño.”

Para ilustrar esta afirmación, Pareto toma como distribución de referencia la del reino de Saxe de 1886 (distribución 1), cuyos valores de los parámetros son:

$$\alpha_1 = 1,5, \quad h = 100, \quad a_1 = 0, \quad z_1 = 900 .$$

Después hace variar el parámetro alfa,

$$\alpha_2 = 1,6, \alpha_3 = 2,$$

manteniendo la renta mínima constante, con una renta media, en ambos casos, que crece 1,2 veces:  $z_2 = z_3 = 1.080$  .

Para el cálculo del parámetro  $a$  de las distribuciones 2 y 3, utiliza la fórmula (13) obteniendo:

$$a_2 = 168, \quad a_3 = 480 .$$

Para comparar las distribuciones 1 y 2, calcula la renta  $x$  correspondiente al punto donde las funciones de supervivencia se cortan, mediante la fórmula

$$(25) \quad \frac{u_{2x}}{u_{1x}} = \left(\frac{x}{h}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{h + a_2}{x + a_2}\right)^{\alpha_2}.$$

La renta de corte es la  $x$  donde (25) es igual a la unidad,  $x = 367.000$  marcos. Cuando (25) es mayor que la unidad entonces la desigualdad de las rentas disminuye y cuando es menor que la unidad aumenta. Sobre un total de un millón de individuos, calcula que hay 941.000 individuos con una renta por debajo de 2.000 marcos.

Por lo que se refiere a la comparación de las distribuciones 1) y 3), siguiendo el mismo procedimiento, obtiene para la renta de corte  $x = 11.650$  marcos. Sobre un total de un millón de individuos, calcula que hay 901.000 individuos con una renta por debajo de 11.650 marcos. (Pareto, 1897, § 965, pp. 323-324).

Pareto concluye, resumiendo estos razonamientos teóricos y empíricos, y dice así:

“La restricción que hemos debido hacer desde el punto de vista teórico, no ha lugar, en la práctica, sea porque la ley que supone para la distribución de las rentas totales, no es la que revela la experiencia, sea porque, incluso apartándonos considerablemente de esta ley, la restricción en cuestión no tendría valor más que para rentas bastante elevadas. Podemos pues decir que el aumento de la riqueza en relación a la población produce sea el aumento de la renta mínima, sea la disminución de la desigualdad de las rentas, sea los dos efectos acumulativamente. Actualmente, en nuestras sociedades, parece que es este último caso el que se verifica, y un gran número de observaciones nos hacen ver que el bienestar del pueblo, en general, ha crecido en los países civilizados.” (Pareto, 1897, § 965, pp. 324-325).

En suma, Pareto, en su estudio comparativo de las distribuciones de las rentas, descarta el caso en que las distribuciones se cortan (no serían comparables globalmente) aduciendo argumentos empíricos. En el caso de las distribuciones anteriores el punto de corte se da para rentas muy altas y el número de individuos con renta menor que la renta de corte es, en términos relativos y absoluto, muy alto.

Considera que la renta mínima  $h$  es constante, en razón de su indeterminación a partir de las estadísticas del impuesto sobre la renta disponibles.

Toma el parámetro  $\alpha = 0$ , porque para los datos de las rentas de varios países los valores del parámetro  $\alpha$  son muy pequeños.

En definitiva, en su estudio comparativo de las distribuciones de las rentas, reduce la ley de tipo II a la de tipo I. Por todo ello la fórmula (23) se reduce a,

$$dz = -\frac{h + \alpha}{(\alpha - 1)^2} d\alpha,$$

y si la renta media aumenta,  $\alpha$  debe disminuir, es decir, disminuye la desigualdad de las rentas.

### Consecuencias del criterio de desigualdad propuesto por Pareto

El objetivo de esta sección es desarrollar criterios generales que nos faciliten la comparación de dos distribuciones de renta. Dadas dos distribuciones de renta 1 y 2, de acuerdo con (1), la desigualdad de la distribución 2 disminuye respecto a la distribución 1 siempre y cuando las correspondientes funciones de supervivencia verifiquen

$$u_{2x} \geq u_{1x},$$

para todo  $x \geq 0$ , y la desigualdad es estricta para algún  $x$ . Por tanto, las correspondientes funciones de distribución verifican

$$F_2(x) \leq F_1(x),$$

para todo  $x \geq 0$ , y la desigualdad es estricta para algún  $x$ . En esta situación, se dice que *la función de distribución  $F_2$  domina estocásticamente en primer grado (dominancia de grado I) a la función de distribución  $F_1$* .

En el caso de que las funciones de distribución sean discretas, las funciones cuantil de las distribuciones 1 y 2 se escriben,

$$Q_1(p) = \min\{x | F_1(x) \geq p\}$$

y

$$Q_2(p) = \min\{x | F_2(x) \geq p\},$$

respectivamente. Si la distribución 2 domina a la 1,  $F_2(x) \leq F_1(x)$ , entonces  $\{x | F_2(x) \geq p\} \subset \{x | F_1(x) \geq p\}$  y

$$Q_2(p) = \min\{x | F_2(x) \geq p\} \geq \min\{x | F_1(x) \geq p\} = Q_1(p).$$

Es decir, la distribución 2 exhibe dominancia estocástica de grado I sobre la distribución 1 siempre y cuando las correspondientes funciones cuantil verifiquen

$$Q_2(p) \geq Q_1(p),$$

para todo  $p \in [0,1)$ , y la desigualdad es estricta para algún  $p$ .

Se puede interpretar la función cuantil como una función que ordena o gradúa las rentas de una distribución, de menor a mayor, perdiendo cada renta la conexión con el individuo que la posee. Si para cada rango  $p$  la función cuantil 2 no está por debajo de la función cuantil 1, se dirá que la distribución 2 domina por rangos a la distribución 1. La dominancia por rangos entre distribuciones de rentas, es consecuencia de la aplicación del criterio de dominancia de Pareto a rentas ordenadas de menor a mayor (Sen, 1973).

Como consecuencia de la dominancia de grado I, se deduce que la media de la distribución 2,  $\mu_2$ , es mayor o igual que la media de la distribución 1,  $\mu_1$ . En efecto, efectuando una integración por partes en la fórmula de la media teórica se obtiene

$$\mu = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx.$$

De la dominancia de grado I se deduce

$$\mu_2 = \int_0^{\infty} [1 - F_2(x)] dx \geq \int_0^{\infty} [1 - F_1(x)] dx = \mu_1.$$

Es decir, *si disminuye la desigualdad ha de aumentar la renta media.*

Otra consecuencia de la dominancia de grado I está relacionada con la razón de concentración de Gini,  $R$ , y la media de las diferencias con repetición de Gini,  $\Delta$ .

La razón de concentración de Gini es un índice de medida de la concentración de la riqueza definido, en principio, para rentas discretas ordenadas de menor a mayor, que varía de 0 a 1: el valor 0 corresponde a la menor concentración o máxima igualdad y el valor 1 corresponde a la mayor concentración o máxima desigualdad. Nosotros utilizaremos la generalización de  $R$  al caso de rentas continuas, que geométricamente es igual a dos veces el área de Lorenz (área comprendida entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución) y su expresión analítica es

$$R = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp,$$

donde  $L(p)$  es la función de Lorenz,  $L: [0,1] \rightarrow [0,1], L(0^+) = 0, L(1^-) = 1$ , no decreciente, convexa respecto al eje de abscisas y definida por

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^p Q(u) du,$$

siendo  $Q$  la función cuantil (20). La función de Lorenz absoluta es

$$G(p) = \int_0^p Q(u) du.$$

Haciendo el cambio de variable  $p = F(x)$  se obtiene

$$G(1) = \int_0^1 Q(p) dp = \int_0^{\infty} x dF(x) = \mu.$$

La razón de concentración en términos de la función de Lorenz absoluta es

$$R = 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^1 G(p) dp.$$

Haciendo una integración por partes se obtiene la razón de concentración en términos de la función cuantil

$$(27) \quad R = \frac{1}{\mu} \int_0^1 (2p - 1) Q(p) dp.$$

La media de las diferencias con repetición de Gini,  $\Delta$ , es una medida de la dispersión de los valores de la renta definida, en principio, para rentas discretas, ordenadas de menor a mayor, y se define como la media de las diferencias absolutas de los valores de la renta, tomados éstos dos a dos. La extensión a una distribución de rentas continuas, con función de distribución  $F$  y función de densidad  $f$  es

$$\Delta = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |x - y| f(x) f(y) dx dy.$$

Teniendo en cuenta que  $|x - y| = x + y - 2 \min\{x, y\}$ , la integral doble anterior se puede expresar

$$\Delta = 2 \int_0^{\infty} [1 - F(x)]F(x) dx.$$

Otra forma de obtener la integral doble es tomar límites continuos en la fórmula,

$$\Delta_R = \frac{4}{n} \sum_{h=1}^n \left( \frac{h}{n} - \frac{n+1}{2n} \right) x_h,$$

de la media de las diferencias con repetición para el caso discreto y se obtiene:

$$\Delta = 4 \int_0^{\infty} \left( F(x) - \frac{1}{2} \right) x f(x) dx$$

Haciendo el cambio de variable  $p = F(x)$ , se obtiene la media de las diferencias en términos de la función cuantil:

$$(28) \quad \Delta = 2 \int_0^1 (2p - 1)Q(p) dp.$$

De (27) y (28) se deduce

$$\frac{\Delta}{2\mu} = R.$$

Si la distribución 2 domina a la distribución 1,  $Q_2(p) \geq Q_1(p)$ , teniendo en cuenta (27) y (28) se puede escribir:

$$\mu(1 - R) = 2 \int_0^1 (1 - p)Q(p) dp = \mu - \frac{\Delta}{2}.$$

En consecuencia,

$$\mu_2(1 - R_2) \geq \mu_1(1 - R_1), \quad \mu_2 - \frac{\Delta_2}{2} \geq \mu_1 - \frac{\Delta_1}{2}.$$

Este criterio mide crecimiento y desigualdad. Es decir, el criterio expresa que una parte de la renta media es debido a una contribución del aumento o disminución de la concentración de la riqueza.

Utilizando las fórmulas (11), (20), (27) y (28), se deducen las fórmulas de la renta media, razón de concentración de Gini, mitad de la media de las diferencias,

criterio  $\mu(1-R)$ , para el caso en que la distribución de la renta sigue la ley de Pareto tipo II, con parámetro  $b = \alpha + h$ :

Renta media,

$$(29) \quad \mu = h + \frac{b}{\alpha - 1}.$$

La media es compatible con el criterio de dominancia.

Razón de concentración de Gini (*RCG*),

$$(30) \quad R = \frac{\alpha b}{[h(\alpha - 1) + b]} \frac{1}{(2\alpha - 1)}.$$

Esta razón no es compatible con el criterio de dominancia.

Medida de la media de las diferencias de Gini (*MDG*),

$$(31) \quad \frac{\Delta}{2} = \frac{\alpha b}{(\alpha - 1)} \frac{1}{(2\alpha - 1)}.$$

La media de las diferencias es compatible con el criterio de dominancia. Además, si el parámetro  $\alpha$  aumenta, la media de las diferencias disminuye.

Criterio  $\mu(1-R)$ ,

$$(32) \quad \mu(1-R) = \mu - \frac{\Delta}{2} = h + \frac{b}{2\alpha - 1}.$$

Así mismo,  $\mu(1-R)$  es compatible con el criterio de dominancia.

Si en las expresiones anteriores hacemos  $b = h$ , se obtienen las fórmulas correspondientes para la ley de Pareto de tipo I.

## Ejemplos ilustrativos de la ley de Pareto tipo II

En esta sección mostramos algunos supuestos empíricos que ilustran la riqueza y los problemas que se pueden presentar en la aplicación de la ley de Pareto tipo II. Para los cálculos utilizamos las fórmulas (29), (30), (31) y (32).

Ejemplo I

Distr.	$\alpha$	$h$ , Renta mínima	$b$	$\mu$ , Renta media	$\Delta$ , MDG	$R$ , RCG	$\mu(1-R)$
Distr. 1	1,8	24	7	32,75	12,12	0,185	26,692
Distr. 2	1,6	34	15	59	36,6	0,308	40,818

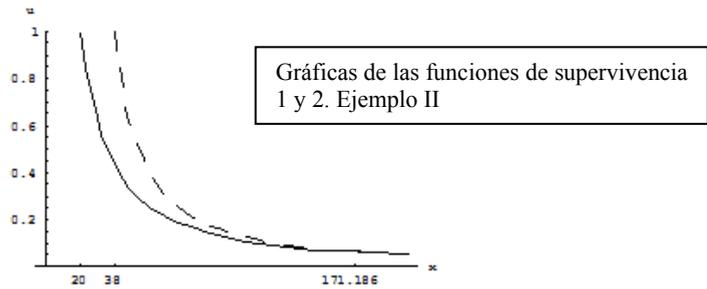
Se trata de un supuesto que ilustra la dominancia estocástica de grado I, de la distribución 2 sobre la 1, donde  $\alpha_2 < \alpha_1, h_2 > h_1, b_2 > b_1$ . En consecuencia, aumenta la renta media y el criterio  $\mu(1-R)$ . Además, al ser  $\alpha_2 < \alpha_1$  y  $b_2 > b_1$ , la media de las diferencias de Gini (31) debe aumentar.

En cuanto a la razón de concentración de Gini, un aumento pequeño (10 u.m.) de la renta mínima, hace aumentar  $R$  de 0,185 a 0,308. Pero si en la distribución 2 aumentamos la renta mínima hasta 80 u.m., un aumento grande de 56 u.m., manteniendo los valores de los parámetros  $\alpha_2$  y  $b_2$ , entonces la razón de concentración disminuye,  $R_2 = 0,173$ .

#### Ejemplo II

Distr.	$\alpha$	$h$ , Renta mínima	$b$	$\mu$ , Renta media	$\Delta$ , MDG	$R$ , RCG	$\mu(1-R)$
Distr. 1	1,3	20	20	86,67	108,3	0,625	32,500
Distr. 2	1,4	38	21	90,50	81,67	0,451	49,667

En este supuesto,  $\alpha_2 > \alpha_1, h_2 > h_1, b_2 > b_1$ . Las funciones de supervivencia se cortan en el punto  $x = 171,186$ . Para  $20 < x < 171,186$  se observa que la función de supervivencia 2 (curva de puntos) está por encima de la función de supervivencia 1 (curva de trazo continuo), pero  $u_{2x} < u_{1x}$  para  $x > 171,186$ , y solamente el 6,13% de los individuos supera esa renta, en ambas distribuciones. En consecuencia, no se verifica el criterio de dominancia estocástica de grado I, y, no obstante, aumenta la renta media y el criterio  $\mu(1-R)$ .

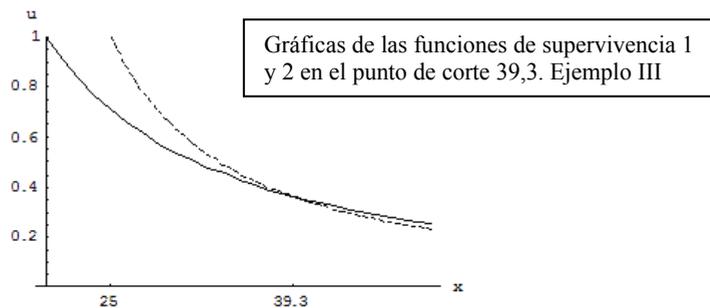


Ejemplo III

Distr.	$\alpha$	$h$ , Renta mínima	$b$	$\mu$ , Renta media	$\Delta$ , MDG	$R$ , RCG	$\mu$ (1-R)
Distr. 1	1,4	20	18	65	70	0,538	30
Distr. 2	1,3	25	12	65	65	0,500	32

En este ejemplo,  $\alpha_2 < \alpha_1$ ,  $h_2 > h_1$ ,  $b_2 < b_1$ . Se observa que la renta media permanece constante, la media de las diferencias de Gini y la razón de concentración disminuyen. Es decir, aunque la riqueza permanece constante, se puede interpretar que ha habido una redistribución de la riqueza.

No se verifica la dominancia estocástica de grado I. En efecto, las funciones de supervivencia se cortan en dos puntos de renta  $x = 39,3$  y  $x = 3358,8$ . Para  $25 < x < 39,3$  la función de supervivencia 2 está por encima de la 1,  $u_{2x} > u_{1x}$ , y un 36% de los individuos supera la renta 39,3, en ambas distribuciones. Para  $39,3 < x < 3358,8$  la función de supervivencia 2 está por debajo de la 1,  $u_{2x} < u_{1x}$ . Para  $x > 3358,8$  la función de supervivencia 2 está por encima de la 1,  $u_{2x} > u_{1x}$ , y un 0,06% de los individuos supera la renta 3358,8, en ambas distribuciones.



## Bibliografía

- BORKENAU, F. (1941): *Pareto*. Versión española de Nicolás Dorantes. Fondo de Cultura Económica. Méjico.
- BORTKIEWICZ, L. V. (1931): *Die Disparitätsmasse der Einkommensstatistik (Los índices de desigualdad de las rentas)*. XIX Session de L'Institut International de Statistique, Tokio, 189-298.
- BRESCIANI-TURRONI, C. (1907): Sull'interpretazione e comparazione di seriazioni di redditi o di patrimonio. *Giornali degli Economisti*, 17(24),13-47.
- BUSINO, G. (1987): *Pareto, Vilfredo (1848-1923)*. The New Palgrave Dictionary of Economics, 799-804.
- CABRILLO, F. (2006): *Economistas extravagantes*. Hoja perenne. Madrid.
- D'ADDARIO, R. (1933): Intorno alla validità dei due teoremi paretiani sulla dinamica distributiva. *Atti dell'istituto nazionale delle assicurazioni*. Vol. VI. Conferenze di cultura assicurativa dell'anno 1933.
- LEROY-BEAULIEU, PAUL. (1881). *Essai sur la repartition des richesses et sur la tendance a une moindre inégalité des conditions*. Guillaumin et Cia. Libraires. Paris.
- PARETO, V. (1896): *Cours d'Économie Politique. Tome I*, F. Rouge Libraire-Éditeur, Lausanne. Obras completas publicadas bajo la dirección de G. Busino, Librairie Droz, Genève, 1964.
- (1897): *Cours d'Économie Politique. Tome II*, F. Rouge Libraire-Éditeur, Lausanne. Obras completas publicadas bajo la dirección de G. Busino, Librairie Droz, Genève, 1964.
  - (1906): *Manuale di economia politica con una introduzione alla scienza sociale*, Società Editrice Libreria. Nosotros utilizamos la edición italiana de 1919 que se puede encontrar en <http://www.archive.org>.
  - (1909): *Manuel d'Économie Politique*. Traduit sur l'édition italienne par Alfred Bonnet (Revue par l'auteur). V. Giard & E. Brière, Libraires editeurs. Paris.
  - (1965): *Écrits sur la courbe de la répartition de la richesse. Chapitre 6: La repartition des revenus*, publicado por primera vez en "Le monde économique", 28 août 1897, 259-261. Obras completas publicadas bajo la dirección de G. Busino, Tomo III, Librairie Droz, Genève.
- SCHUMPETER, J. A. (1951): *Diez grandes economistas. De Marx a Keynes*. Versión española de Fabián Estapé. Editorial Bosch, Barcelona, 1955.
- (1951): *Historia del análisis económico*. Versión española de Manuel Sacristán y prólogo de Fabián Estapé. Editorial Bosch, Barcelona, 1955.
- SEBASTIÁN, M. (1949): El tratado de sociología de Pareto. *Anales de Economía*, vol. IX, oct-dic, 461-472.
- SEN, A. (1973): *On economic inequality*. Clarendon Press. Oxford.
- SOREL, G. (1897) : La lois des revenus. *Le Devenir Social*. 3éme. Année, n° 7. JUILLET.
- ZUMALACÁRREGI, J. M. (1951): *Vilfredo Pareto. 1848-1923*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.

## CAPÍTULO 5

# Percentage: Emergence, migrations, and routinization in the political sciences from the seventeenth to the nineteenth century.

JEAN-PIERRE BEAUD  
Université du Québec à Montréal

Among the most basic tools in elementary statistics are the percentage, the average, and the statistical table. Today taught very early in the academic curriculum, they testify to a minimal effort at formalization. Percentages and averages allow for comparisons among phenomena and periods, while tables, by bringing together and classifying data, allow for the formulation of hypotheses, which is referred to as their heuristic value. The history of these tools is largely yet to be written, at least from the mathematics point of view, and the history of their

---

\* This essay is an abridged version of an article published in *La Revue de Synthèse*, tome 130, 6<sup>e</sup> série, n<sup>o</sup> 4, 2009, p. 637-660.

concrete use remains embryonic. Of the three, percentage has been most neglected, to the point that it might be considered a “non-subject.” Aside from a few historical mentions here and there, by authors such as Le Bras (2000) and Klein (1997), there has been almost no scholarship on the paths by which percentage rose to importance. These are the paths that I would like to explore, first, by examining more closely the work of the early political arithmeticians; then, by focusing on a British colony in North America, Lower Canada (today called Quebec), and analyzing the few works that illustrate the birth of a statistical point of view there; finally, by turning back toward early-nineteenth-century England and the first British government statisticians.

The works of John Graunt and William Petty are well known, and many studies have been devoted to them. Most of their writings are now available on line and thus lend themselves to a narrow analysis of the term “per centum,” or “per cent.” The work of Joseph Bouchette, a Canadian statistician active in the first half of the nineteenth century, is, however, largely unknown. Bouchette, who was the surveyor general of Lower Canada and thus the province’s cartographer and statistician for the first forty years of the nineteenth century, wrote two major works, *Description topographique de la province du Bas-Canada* and *The British Dominions in North America*. Comparing these two texts, written more than fifteen years apart (the first was published in 1815; the second, in 1831), we may proceed with a sort of experiment. Although both books were motivated by the same project and concerned the same geographic territory, there are notable differences between them. It is true that in the interval between 1815 and 1831, more statistical data became available, conveying in a way the dissemination of figures into the geographic space under consideration; it is also true that the technology used by the surveyor was refined, testifying to the gradual structuring of statistical thought. But above all, while percentages were completely absent from Bouchette’s 1815 book, they occupy a *fairly important* and *deliberate* place in his thought in the 1831 book. How do we account for this discursive transformation? What path did percentage take to pass from an already routinized use at the time (involving interest rates) to new uses? How did this gradual neutralization of percentage occur from Graunt to Bouchette – or, put another way, how was percentage transformed from specific, targeted, limited, “attached” use to general, extensive, “free” use?

## **Proportions and percentages in the times of the early political arithmeticians**

Today, we are well aware of the virtues of the percentage: this very particular fraction, with a denominator of 100, almost instantaneously suggests comparisons. Setting out a column of frequencies in percentages in a statistical table enables readers to get a quick idea of the frequency distribution; absolute frequencies, relative frequencies, and relative frequencies in percentages represent steps not

only toward comparison, but also toward abstraction. At first glance, one might think that such simple forms of statistical tools – percentages and averages – once formulated, quickly gained popularity and spread rapidly to applications in which they seem indispensable today – for example, determination of population movements. Yet, when we look more closely, we quickly find that although they migrated into certain fields with ease, they found their place in other fields, seemingly closely related to the first ones, only much later.

It is generally agreed that percentages were first used in the fields of finance and commerce (particularly for calculations of interest). In the view of Judy L. Klein (1997), it was John Graunt, the author of *Natural and Political Observations* (1662), who imported into political rhetoric one of the arithmetical techniques that merchants had long been using, the “rule of three.” It was the most “spectacular” tool in what Graunt called the “Mathematiques of my Shop-Arithmetique” (Klein, 1997). The context may have been favourable to a technological transfer of “Shop-Arithmetique” from the field of commerce to that of politics. Charles II, seeking legitimacy after the English Civil War, the beheading of his father, and Cromwell’s republic, may have been particularly impressed by and attracted to the way in which Graunt used the rule of three, or “Merchant’s Rule,” for parsimonious treatment of “political” problems such as the lack of correspondence between the emergence of epidemics and the “Entrance of Kings” (Graunt, 1662, “The Epistle Dedicatory”). The admission of Graunt, a draper by trade, to the Royal Society gave concrete expression to the change in status of arithmetical reasoning.

In his *Observations*, which a number of authors cite as the first work on demography and statistics (Le Bras, 2000: 7), Graunt made extensive use of various forms of fractions. His objective was to measure the occurrence of a phenomenon (mortality) and make comparisons among various phenomena (causes of mortality, diseases, cities, etc.), and he almost systematically simplified the figures taken from bills of mortality to provide fractions that the reader could visualize. Using his “arithmetic,” he obtained propositions of the type “ $x$  parts of  $y$ ” and “ $x/y$ ”: for instance, he observed that “two parts of nine die of *Acute*,” because “of the said 229250 dying of all Diseases, there died of acute Diseases (the *Plague* excepted) but about 50000, or  $2/9$  parts” (Graunt, 1662: Index, 15). Often, the fraction was expressed in the even simpler form of propositions of the type “1 in  $x$ ” or “1 to  $x$ ”: he reports, “[T]he deaths by reason of *Agues* are to those caused by *Fevers*, as one to fourty”; “*Abortives*, and *Stilborn*, to those that are *Christned* are as one to twenty”; “not one in fifteen hundred dies *Lunatick*” and “about one third of all that were ever quick die under five years old, and about thirty six *per Centum* under six” (Graunt, 1662: Index). The fraction thus sometimes took the form, new for this topic, of a percentage – for example, Graunt noted that “seven *per Centum* die of *Age*.” Today, we consider some of these forms (the former) less desirable than others (the latter). Percentage, used almost systematically today except when the fraction is a very simple one, such as one quarter, two thirds, or one half, was

used by Graunt only when the denominator of the fraction could easily be brought to one hundred. Moreover, Graunt never used percentage to determine increases or decreases (of population for example) from one period to another, while we now see this as a particularly useful application of percentage. In such a situation, Graunt would, instead, simplify the figures describing the situation in the two time periods under consideration. If, in London, 6,986 people died in 1593–94 and 12,110 people died in 1614–15, one might say that the fraction of deaths was 7 (for 6,986) in 12 (for 12,110). As Hervé Le Bras remarks, Graunt also had difficulty thinking correctly of progressions when they concerned three periods (Le Bras and Bertaux, 2000: 31–32). As we shall see, in Bouchette's times, almost 170 years later, percentage found its most spectacular field of application in calculations of progression. But why did Graunt come to use, although in a limited way (six times only, in fact) a mathematical form, percentage, that had previously been used only in the financial field? And in fact, was it really Graunt?

It is not my purpose here to discuss the hypothesis of the true authorship of *Observations*. Hervé Le Bras recently wrote a book (Le Bras, 2000) in which he argued strongly in favour of William Petty, a friend of Graunt's, as the real author. In the introduction to his book, Le Bras lays out his argument. On the one hand, if Graunt is the author, one might make a clear link between early demography and statistics and a rather unsophisticated version of Marxist determinism. On the other hand, if it is Petty, the political origin of both disciplines is clear. In dwelling on the political reception of *Observations*, Klein (1997) gives credit to the political thesis without outright naming Petty and dismissing Graunt. Even more recently, Sabine Reungoat (2004) has come down squarely on Graunt's side. But beyond such divergences, almost all readers of *Observations* agree that there is something of both Graunt and Petty, or Petty and Graunt, in this famous book. After reading the book in various ways, Le Bras attributes the chapters that are less "arithmetically" elaborate to Graunt and the "stronger" ones to Petty (Le Bras, 2000: 107). Reungoat agrees that a "simple review of the parallelisms between *Observations* . . . and *Treatise* . . . [a book published by Petty in 1662] is sufficient to reject the extreme thesis that Petty took no part in the composition of Graunt's book." After conducting a brief stylistic and internal analysis of *Observations*, she concludes, "A number of passages . . . reflect themes of Petty's" and these "are no doubt the sign of an effective contribution by Petty" (Reungoat, 2004: 33, 39, our translation). Nevertheless, Graunt seems to her to be the principal author of the book.

If we follow the approach of Le Bras and Reungoat with regard to the inquiry into authorship, but look, this time, at the use of percentage, we observe the following points: percentage is used in *Observations* only in the index and in chapters 2 and 11; there are chapters in which the discussion would not lend itself to such a use (chapters 1, 5, 6, 9, and 10); in some chapters, percentage might have been used (chapters 3, 4, and 12), while in others it is less likely (chapters 7 and 8).

From this point of view, if we divide the chapters between Graunt and Petty, then chapters 2 and 11 must be attributed to a single man, and this man must be Graunt. Indeed, a close study of Petty's writings shows that he used percentage (only once and in a rather unconvincing fashion) only at the end of his life. In *The Second Essay*, printed in 1687 as part of a collection called *Five Essays in Political Arithmetick*, appears the following proposition: "1. *That forty per cent. die out of the hospitals at Paris . . .*" (Petty, 1687a). And that is all, even though many propositions could have been converted into percentages, as they had been in 1662! It is hard to imagine an author who has "discovered" the comparative power of percentage being so parsimonious in its use thereafter – unless he did not truly grasp the extent of its power. In fact, for a more convincing use of percentage, we would have to look to the ensuing generation of political arithmeticians: Gregory King and Charles Davenant.

Of course, as Graunt wrote nothing else (of significance, at least) after *Observations*, the credit that he is given for being the vector of transfer for percentage from one sector (finance) to another (political arithmetic) is due to lack of credit to Petty on this front. It should be noted that Graunt, like his successors, reserved percentage for synchronic usage – that is, for comparisons between categories within a single period – while the very notion of interest rate suggested a diachronic usage – that is, use for progression calculations. For this purpose, political arithmeticians used, instead, calculations involving doubling of the population, which corresponded to how growth was conceived at the time. The typical example in this sense is that of the evolution of the human population since Creation. In the biblical framework, which was Petty's in *Another Essay in Political Arithmetick* (Petty, 1683), population doubling since Adam and Eve was a natural idea. In other words, calculations regarding mortality and calculations regarding growth sprang from two different intellectual processes; the tools used for the former thus did not necessarily work for the latter.

Graunt came to use percentage mainly because this technique was part of his arithmetic as a shop owner, as he was in the habit of seeing it in financial matters. But it was above all because the documents on which he was working, bills of mortality, had to be condensed, transformed, reduced, and abridged: he said that he had manage to reduce "several great confused *Volumes* into a few perspicuous *Tables*" (Graunt, 1662, "The Epistle Dedicatory"). In fact, this was the project that interested him and that he seems to have been the first to tackle, drawing innovatively on his knowledge of arithmetic. From the times of John Graunt, William Petty, Gregory King, and Charles Davenant, the early generations of political arithmeticians, percentage thus gradually took hold in mortality studies. A century and a half later, a comparable migratory phenomenon was to take place in another part of the world (the British colonies of North America).

## Percentages and proportions in British North America

Joseph Bouchette is considered the father of Canadian statistics. The surveyor-general for Lower Canada for almost 40 years, he wrote two major works on statistical topography. The project that interested him was reminiscent of Petty's; in fact, Petty was surveyor-general for Ireland and formulated, for the Down Survey, the first topographic maps of the country based on a survey of the entire territory (Reungoat, 2004, 16-20). A century and a half after Petty, Bouchette sought a means to synthesize the material that he had assembled for his two books, including data that he had collected while surveying the country. He used maps, tables, averages, and ratios to present the phenomena observed in an economical form, and he drew principles from them using a typically Baconian inductive method. Although in Bouchette's time – the first third of the nineteenth century – use of percentage in mortality studies was well established, this did not seem to be the case for the evolution of populations. All of Bouchette's contemporaries in the same geographic space (British North America) still used proportions, fractions, and ratios, as in the times of Graunt and Petty. Like their forebears, they tended to think in terms of population doubling, as did Bouchette in his first book, published in London (in French and English) in 1815. In 1831, however, when what may have been seen as a new edition of the 1815 book was published, percentage was used in calculations of population evolution. Let us try to see how this happened.

While no percentages can be found in *Description topographique de la province du Bas-Canada* (1815), but only simple fractions such as one third and two thirds, and the numbers given, which are almost all round figures, are modified by terms such as “about,” more or less,” and “almost,” *British Dominions in North America* (1831) displays Bouchette's mastery of percentage. For instance, when he assesses the increase in the population of Upper Canada (which corresponds, in part, to today's province of Ontario), Bouchette speaks of a “ratio” of about 8% from 1826 to 1827 and a “ratio” of slightly more than 5% from 1827 to 1828. This allowed the average increase to be calculated – which would have been difficult to accomplish without the use of percentages (Bouchette, 1831, vol. 1: 109). Similarly, combining average and percentage, Bouchette calculates a percentage corresponding to the fraction (multiplied, thus, by 100) between the difference, on the one hand, between the average number of baptisms and the average number of deaths (for a period of 28 or 32 years) and, on the other hand, the average number of baptisms (Bouchette, 1831, vol. 1: 356). In both cases, the percentage obtained did not correspond to “reality” but was an abstract entity that would not exist otherwise; moreover, the latter corresponded to nothing that could be easily visualized (unlike an average percentage of population increase, which places two figures related to the same thing in relation). Percentage thus had the effect of distancing the things being measured, which allowed work to be conducted on them without regard to what they were and to create new things the reality of which was not physically discernable but that evolved in time or space. Some of

them – for example, the average percentage of population increase – because they were subsequently the subject of political and cognitive study by different institutions and individuals – gradually took the form of quasi-real things, *objects*; others, such as Bouchette’s  $[(B - D)/B \times 100]$  ratio,<sup>1</sup> remained purely mathematical figures. The artefacts constructed from percentage or average also had the effect of “depersonalizing persons,” who thus became individuals in the statistical sense of the term and formed the basis, in the sociological sense, of a population. It was then possible to proceed with new calculations – for example, estimating a future population – all other things remaining equal (and to be somewhat liberated from the concept of population doubling). As the British colonies of North America had a population of about 900,000 in 1825 and about 1.4 million in 1831 – a 44% increase over six years –one might project that in less than half a century, these colonies would have a population of 16 million (Bouchette, 1831, vol. 2: 232). Because it was particularly flexible, percentage allowed such projections to be made easily (starting from the moment when one had totals available for at least two points in time). And because it brought everything to a common base that no longer corresponded to the observed empirical quantities, percentage also allowed comparisons that might seem senseless at first glance. For instance, Bouchette was able to compare the pace of progression of number of ships, that of tonnage, and that of number of sailors (Bouchette, 1831, vol. 2: 240) and to build from these data a new artefact, “progress of maritime trade.”

However, Bouchette also used older, more concrete forms of relationships. First, he referred to proportions in a well-accepted form, such as the proportion of Catholics in Lower Canada (7/8ths, as fractions were written at the time), which had been used since at least the late eighteenth century in almost all topographic works (as well as voyage accounts and other writings) on the country and were widely circulated. Second, when linked data lent themselves, almost naturally, thanks to their simplicity (2 and 75, for example), to the creation of a proportion, he did so. Finally, he also used the “old ratios” quite often (though not always) when he simply compared two entities and thus was not creating an artefact such as a progression.

In short, Bouchette’s use of percentages and proportions was not that remote from current use. Practical reasons led him to use one or the other. When he was involved in calculations related to growth, he almost systematically turned to the most abstract form of comparison – the least directly linked to the phenomenon measured, or to the data gathered. It is in this way that his work was pioneering, at least in British North America. Using averages, he was also able, through a series of calculations, to compare different British provinces in North America; for instance, for each province, he could relate the area of cultivated land to the population to determine cultivated area per inhabitant (Bouchette, 1831, vol. 1:

---

<sup>1</sup> B for average number of baptisms; D for average number of deaths.

358, vol. 2: 235). He seems to have routinized this way of working, and he also made tables to bring all of this information together (Bouchette, 1831, vol. 1: 366–67).

The most obvious difference between the 1815 and 1831 books was thus the implementation of new analytic tools. This was the case for percentage, of which Bouchette made great use, as we have seen, but also for other techniques, such as the statistical table that organizes data and the results of calculations made from these data. This may seem banal given our familiarity with percentage, but if we were to consult Lower Canadian writings of the time, we would see that beyond references to interest rate and, very marginally – at least for Lower Canada – mortality rates, percentages were never used. In fact, the use of percentages to describe the population had not been mastered at the time. For example, in the Frenchman Isidore Lebrun's *Tableau statistique des deux Canadas*, published in 1833, the proportions given (17/20ths of inhabitants of Upper Canada were of British origin; 8/9ths of the inhabitants of Lower Canada were of French origin) apparently refer to totals of which they were simplifications: the figures of 200,000 for Upper Canada, which corresponded, according to Lebrun, to "general opinion," and 540,000 for Lower Canada, which came from "handwritten notes" sent from Montreal (or brought by visitors) (Lebrun, 1833: 48, 44, 47). Of course, in the 1832 report of the Census Committee of Lower Canada, there are two instances of percentage: "The 1831 census tables offer to view an increase of 88,287 persons over 1825, constituting growth of 20 persons out of 100 in the space of six years – which exceeds the population increase in the United States, according to their last census, which shows, over a period of 10 years, an increase of 32 persons out of 100" (2 Gul. IV. A. 1832 Appendice, III, our translation). But, as we see, this is an *intermediary* form of percentage that still reveals the concrete referent, persons. Bouchette pushed the standardization further; he made a point, for example, of calculating percentages of annual progression, which enabled him easily to make comparisons (Bouchette, 1831, vol. 1: 348). Percentage thus became a summary of information, an economical means of saying many things in little space.

The paper on medical statistics in Lower Canada that Dr. William Kelly presented on 19 April 1834 to the Literary and Historical Society of Quebec shows a slightly different use of percentage (Kelly, 1834). First, Kelly never used percentages to talk about progression, but turned to the classic index: the number of years that it would take for the population to double. However, two forms of percentage appeared several times in his presentation. The first could also be called intermediary. Comparing, for example, the number of male children baptized to the number of female children baptized, he calculated a ratio resulting, for the Quebec City and Trois-Rivières districts, in a proportion of "106.65 to 100, or 16 to 15" (Kelly, 1834: 198). Bouchette made similar use of percentage (in a slightly more "modern" form). But, at another point in his presentation, Kelly used a modern, accomplished form of percentage. When he looked at mortality, using medical data

for the Canadian army, he calculated the percentage of mortality for each year and an average percentage for the period as a whole (Kelly, 1834: 216 et seq.). Interestingly, Kelly also added a column, on the basis of a table prepared by the Army Medical Department concerning mortality by different diseases for the two Canadas from 1810 to 1822: mortality *in percentage*. The use of percentage to calculate such rates is quite old, since, as we have seen, Graunt used it in the seventeenth century. A reading of the *Montreal Medical Gazette*, one of the first Canadian medical journals, shows that in 1844–45, the use of percentage (or, more precisely, one per thousand) was widespread in discussions of mortality. By “contagion,” it was also commonly used for hospital admissions (since tables were constructed involving admission rates and mortality rates). However, traditional fractions (1 in 35, 2 in 3, etc.) also continued to be used (see, for example, Hall, 1847).

How should we interpret all of this? First, it is clear that in Lower Canada during the period under consideration, percentage was rarely used outside of its application to interest rates. Fascinated by the question of comparative progression of resources and population, Bouchette was the first Lower Canadian author to master the use of percentages and apply them to the population. Even those who took up Bouchette’s analysis methods several years later, such as Isidore Lebrun (1833) and Amury Girod (1835), ignored this “innovation.” Dr. William Kelly, interested in the issue of mortality, employed percentage, a statistical tool that had been in use in this field at least since Graunt. In the 1860s, Arthur Harvey used it extensively (Harvey, 1866). The 1872 debate between statistician, journalist, and businessman Harvey and government statistician and 1871 census manager Joseph-Charles Taché was to a large extent structured around progression calculations in the form of percentages (Harvey, 1872; Taché, c. 1872). Thus, percentage, which made it easy to break out comparisons and place the phenomenon under study in a context of continuity (by the calculation of progressions), was introduced into the scholar’s arsenal through interest rates or mortality rates (Graunt). Bouchette expanded its territory to Lower Canada and, more generally, to the British colonies of North America. How he discovered percentage is not exactly clear. He lived in England for several years while writing his book, and he was a known Anglophile. At the time, Lower Canada was an English colony, and naturally the gaze of its elites was turned toward the homeland.

## **The first English censuses and the question of evolution of the population**

Thomas Malthus’s theses long influenced Western debates and scholarship. In *An Essay on the Principle of Population*, published anonymously in 1798, Malthus made a link between *geometric* growth of populations and *arithmetical* growth of resources (Malthus, 1798). He thus “dramatized” the question of the trivial link

between the evolution of resources and that of populations. It is difficult to imagine today how much anxiety, questioning, and analysis such a “discovery” could provoke, particularly during the first half of the nineteenth century. Was there not something hopeless in envisaging the future from the angle of the diverging evolution of the two terms of the ratio? After *An Essay* was published, attempts to illustrate or invalidate this “law” multiplied. One of the most interesting, because it was based – contrary to the essentially abstract, even theoretical, work by Malthus – on real and relatively reliable data, was organized in the early nineteenth century. Although its objective was first and foremost to count the population and gain a general idea of how it was distributed by *occupation*, the first British census of 1801 was also intended to establish an opinion on the evolution of the country’s population. The law that instituted this first census was called *An Act for taking an Account of the Population of Great Britain, and of the Increase or Diminution thereof*. The reports on the three subsequent censuses, edited by John Rickman, who was one of those opposed to the Malthusian theses, are particularly interesting from this point of view. In fact, while Malthus thought in a largely hypothetical way, in the classic terms of the number of years needed for the population to double, Rickman had access to data that, although not perfect, were reasonably reliable. Malthus gave some figures concerning the United States (an example of a society in which population “had no obstacle to growth”) and several other countries. There is something in his *Essay* that resembles a percentage, but the data provided are vague and based on evaluations or estimates, and the percentages are applied, in a classic manner, to the proportion of births per 10 marriages, or the proportion of births per 100 deaths (Malthus, 1798, chap. 7). On the other hand, Rickman was able, in 1812, to use data from the 1801 and 1811 censuses. Taking account of these data and postulating a constant proportion of baptisms in relation to the population, Rickman estimated the population of England and Wales every ten years from the start of the eighteenth century. He was then able to determine whether the country’s population was rising or dropping, and by how much. By doing this – starting with population numbers that were relatively solid and valid for the ultimate term of the progression – Rickman constructed a problematic that was different from Malthus’s, and was therefore able to avoid analysis in terms of population doubling. In 1700, the population of England and Wales was, according to his calculations, 5,475,000; in 1811, it was 10,488,000. If one reasons in terms of population doubling, one may simply say that the population had not even doubled (or, put another way, had almost doubled) over a period of 111 years. But this observation conceals both a population drop between 1700 and 1710 (still according to Rickman’s calculations) and uneven increases from decade to decade. The data he constructed allowed the pace of these progressions to be determined. The more time passed, the more the bases for these calculations lost their speculative nature due to multiplication of data drawn from the censuses. The 10-year interval (which corresponded to the timing of the censuses and which Rickman adopted for his speculations with regard to the period before 1800) calls,

in fact, for a more flexible tool than doubling. Percentage, which was already in use for annual calculations (regarding mortality tables) found a “natural” application here. A first occurrence can be found in Rickman’s 1812 report:

Whatever opinion may be formed of the foregoing Table of Population for the earlier part of the last Century, a greater degree of authority cannot well be denied to the latter part of it, and more and more as it approaches the present time. By this Table it appears that from the year 1785 to 1795 the Population increased 1,039,000 (Thirteen per Cent.) upon that of 1785; or nearly in the same proportion as in the Ten Years which intervened between the Enumerations of 1801 and 1811: and from 1785 to 1705 [sic, 1795] the Baptisms appear to have exceeded the Burials by 634,245, falling short of the real Increase by about One-third, as has again happened. (Great Britain Historical GIS Project, 2004).

In his 1822 report, Rickman made even more prominent use of percentage. He now had data from a third census. He was still using the principle of a constant ratio between baptisms and population for the period preceding the censuses.

How far the Increase of 14 per Cent, in the period between the Enumerations of 1801 and 1811, and of nearly 16 per Cent, in the period from 1811 to 1821, (as computed on the Female Population only) may have been produced from such causes, cannot be discovered; but that the effect was not very different in the two respective periods, may be reasonably inferred by shortly adverting to the Parish Register Abstract. ... But there is reason to suspect that the Poor Laws are much less conducive to an Increase of Population than they are usually stated to be in argument, and in the Remarks on the Population Schedules; because it must be recollected, that although in Scotland there is no Poor's Rate, the ratio of Increase since 1811 is nearly 16 per cent, upon the Resident Population; while in England it is no more than 18 per cent (as computed upon the Resident Population of both Countries) a small difference, and such as probably would be expected, had Poor Rates equally, or not at all, existed in both Countries. (Great Britain Historical GIS Project, 2004).

Thereafter, the use of percentage spread. For the 1841 British census, for example, no doubt in order to permit instantaneous comparisons, certain tables in the report were constructed solely with columns in percentages. The use of percentages was even more marked in the report on the 1851 census and enabled the superintendent of the census to make comparisons among different countries (starting from the concept of average increase in percent) (Great Britain Historical GIS Project, 2004). Thus, in less than 40 years, percentage had become so widespread that it seemed to lend itself to all – or almost all – uses.

The Canadian Joseph Bouchette, who, like his contemporary the Englishman John Rickman, was writing during a transitional period between the era of estimates and the era of actual counting – that is, modern censuses – also “discovered” the interest and power of percentage, mainly for comparative

purposes. Like Rickman, Bouchette entered a dialogue with Malthusian theses. In 1824 and, especially, in 1831, Bouchette started from Malthus's theories to interpret the relationship between population and resources (which had been one of the subjects of his 1815 book). The doubling of population every 25 years was a key proposition that was circulating widely at the time and took on, because the number was almost round, a symbolic dimension. It was, in fact, central for Malthus (1798, chap. 2: 1). But obviously, for things to stay as they were, for the situation not to deteriorate, production also had to double at least every 25 years. Bouchette therefore played with variations around this figure and calculated progression rates that became meaningful when they were carried over to Malthusian propositions or to those of the "statists" (Bouchette, 1831, vol. 1: 347). In his *British Dominions in North America* (1831), the relationship between population and territory (and potential resources) was constantly evoked or suggested; for instance, after calculating a population density in view of the area of the province, then another density relative to area under cultivation, Bouchette drew a conclusion on "the susceptibility of the country to sustain hereafter a very considerable augmentation of inhabitants." He even detailed this calculation for different districts, then, refining his analysis by the introduction of emigration, he calculated a progression that, for Lower Canada, matched almost perfectly the statist's propositions: "[W]e shall then find that the population of the province doubles itself in almost a double ratio, that is, in 14 or 15 years instead of 26 or 27." Of course, all of these population projections were to be taken in the context of the possible growth of resources. Bouchette concluded, "[W]e are forcibly struck with a conviction of the immense resources of British America to maintain millions of inhabitants from the produce of the soil, and to become eventually distinguished for the scope of its commerce" (Bouchette, 1831, vol 1: 357, 358, 359). He even talked of population doubling every 13 years for the British colonies of North America:

In 1825 the North American colonies, and other parts of the continental dominions in America contained about 900,000 inhabitants; they are now, from correct data, estimated at about 1,400,000, and thus appear to have increased in the ratio of 44 per cent during the short term of six years; continuing to augment in the same proportion, the population would about double itself every 13 years. (Bouchette, 1831, vol. 2: 232).

The British colonies, *because means of subsistence were not lacking*, thus had spectacular growth rates. We can see the relationships that Bouchette posited among the immense territory of Canada, the small population living there at the time, and the potential for subsistence, resources, and therefore population; all of this combined to make Canada attractive for settlement. Showing that, well exploited, Canada would contradict the hard Malthusian laws (which, in fact, did not apply in the same way to countries in the Americas) was the surveyor general's ultimate objective. Upper Canada, fully British and not impeded by the seigneurial system (as Lower Canada was), seemed to offer the perfect illustration for this

potential: “In fact, Upper Canada is rising in a large geometrical ratio into agricultural and commercial importance.” “[N]or can we,” Bouchette added, “in thus contemplating its rapid prosperity, forbear attributing it as well to the ability and efficiency that has almost invariably distinguished the administration of its government, as to the great natural energies and resources of the country” (Bouchette, 1831, vol. 1: 112).

To make his point, Bouchette used both traditional tools – Malthusian ones such as ratios and doubling – and modern tools such as percentage. It is true that when he was writing his 1831 book he had at his disposal relatively reliable data from the 1825 census as well as those drawn from his own investigations. Likely aware of the results of the English censuses, though we cannot be totally certain of this, he placed his text within the framework of the new problematics illustrated by Rickman. The question, from this point of view, is not who was the first to use percentage (Rickman may have been copying some other Englishman), but whether a new discursive context was established in the first half of the nineteenth century that allowed and encouraged the adoption of this new tool. The first modern censuses took place in the new United States in 1790, in Great Britain and France in 1801, in Lower Canada in 1825, as well as in other countries. Therefore, economists, demographers, sociologists, and other scholars had access to more reliable data than before. The Malthusian theses, which were very controversial, particularly in Anglo-Saxon countries, could now be put to the test of verification (or refutation) from “scientific” bases (with statistics developing as a science through this very movement) and no longer from speculative ones.

### **A milestone in the foundation of statistical objectivism**

Today, percentage is in the toolbox of every writer, statistician or not, and the idea that it might be used for any question or object raises no concern (and this is no doubt why its problematization by historians of statistics has been almost nonexistent). It is even its primary characteristic – unlike number of years necessary for doubling, for example – that it is totally neutral (one could speak, in this context, of agnosticism). But the history of the use of percentage shows that it slowly made way into cognitive fields and was not accepted everywhere immediately. One could no doubt make a parallel here with the unification of weights and measures. Today, such a thing seems obvious and, it goes without saying, beneficial. But the old measures had the advantage of being anthropomorphic and corresponding to something locally significant. The “old” ways of calculating (ratios, doubling, etc.) also had the advantage of being directly attached to what one wanted to measure.

What we observe, in fact, is that at the turn of the nineteenth century, percentage proved indispensable for speaking of evolution over a short period.

Doubling was perfect for macro-periods, when the reasoning was more prospective (one started from a point situated remote in time and got closer to the present) and largely speculative (because it was based on estimates). Percentage was perfect for meso- and micro-periods, for which the reasoning was more retrospective (one started from an “approximate” situated in the present and went back in time) and less and less speculative (because it was based on data from censuses or comparable studies). In fact, percentage was to “doubling” what the census was to assessments and extrapolations.

The path that percentage took can be summarized as follows: 1) first, it was a tool used for interest rates in the financial and commercial fields and is derived from ratios known and used for a long time by, among others, merchants; 2) in 1662, John Graunt, a draper, incorporated it into the field (that came to be called demography) of mortality studies; 3) in the early nineteenth century, it migrated toward population growth studies; 4) at the end of the first half of the nineteenth century, it invaded other fields to become a tool applicable to all comparisons in space and time.

Each migration was made in the context of the constitution of a new problematic: “birth of the concept of mortality” in the case of early political arithmeticians; “birth of the concept of population” in the case of the early statisticians. The migrations thus corresponded to means of responding to a concrete question, and the tools appeared as elements in a debate that occupied both great theoreticians and rhetoricians, such as Malthus, and less important producers of discourse, such as Bouchette and Kelly: are living conditions better or worse in London than elsewhere in England or in Paris? Will these conditions improve or deteriorate? Was Malthus correct to think that populations and resources evolved at different rates? How, from this point of view, were the British colonies of North America situated? The incorporation of percentage allowed for a new and better form of response to these questions. It was in this sense that it seems, retrospectively, to have gained in importance. But a study of concrete situations in which it appeared and debates into which it was integrated shows that its virtues alone were not enough for it to gain acceptance. A sort of triad was needed: question and debate; new problem; new tool. Incidentally, the data had to lend themselves to its use: old data assembled for the purpose, as in the cases of Graunt and Bouchette, or new data issuing from the practice of the “modern” census, as in the cases of Rickman and Bouchette. There were also more minor transfers following a process of capillary action (without change of problematic). For example, in the Lower Canadian medical journals of the mid-nineteenth century, the old fractions (1 in 20, 2 in 3) were still used. However, when mortality was discussed, authors “naturally” turned to percentages (as had the first political arithmeticians of the seventeenth century) and as a consequence, percentages were also used for phenomena that were located upstream, such as hospital admissions.

In transitional periods, there was a plurality of statistical tools (doubling, old-style ratios, and percentages). We might make a parallel here with use of the decimal point, which was not yet common in Graunt's time (Le Bras, 2000). The modern forms supplanted the older ones without, however, causing them to disappear completely. In fact, the use of percentages resulted in a gradual neutralization or distancing, and thus seems to have been one of the elements in the foundation of statistical objectivism (Brian, 1994: 317–41). Percentage allows for comparison of abstract entities – the pace of population increase, for example – that would not exist otherwise. By the use of statistical tables, percentages, and rates of progression, the statisticians of the first half of the nineteenth century thus separated their discourse from what Christian Licoppe calls circumstantial accounts (Licoppe, 1996: 258) – partially in the case of the surveyor general of Lower Canada, and more completely in the case of Rickman and the English census takers.

## References

- BOUCHETTE, J. (1815): *Description topographique de la province du Bas-Canada avec des remarques sur le Haut-Canada et sur les relations des deux provinces avec les États-Unis de l'Amérique*. W. Faden, London. Reprinted by Élysée, Montreal, 1978.
- (1831): *The British dominions in North America; or a topographical and statistical description of the Provinces of Lower and Upper Canada, New Brunswick, Nova Scotia, the Islands of Newfoundland, Prince Edward, and Cape Breton, including considerations on land granting and emigration, to which are annexed statistical tables and tables of distances, &c.* 2 vols. Henry Colburn and Richard Bentley, London. 2nd ed., 2 vols., Longman/Rees/Orme/Brown/Green/Longman, London, 1832.
  - (1832): *A topographical dictionary of the Province of Lower Canada*. Longman/Rees/Orme/Brown/Green/Longman, London.
- BRIAN, E. (1994): *La Mesure de l'État. Administrateurs et géomètres au XVIII<sup>e</sup> siècle*. Albin Michel, Paris.
- GIROD, A. (1835): *Notes diverses sur le Bas-Canada*. Imprimerie Boucher-Belleville, Village Debartzch.
- GRAUNT, J. (1662): *Natural and political observations mentioned in a following index, and made upon the bills of mortality, with reference to the government, religion, trade, growth, ayre, diseases, and the several changes of the said city*. London.
- GREAT BRITAIN HISTORICAL GIS PROJECT. (2004): *A vision of Britain through time*. <http://www.visionofbritain.org.uk/index.jsp>.
- HALL, A. (1847): "Observations on the mortality of the City of Montreal, for the year 1846". *British American Journal of Medical and Physical Science*, 3(6): 141 et seq.
- HARVEY, A. (1866): *Year-Book and almanach of British North America For 1867; being an annual register of political, vital, and trade statistics, customs, tariffs, excise and stamp duties; and public events of interest in Upper and Lower Canada*, New Brunswick, Nova

- Scotia, Prince Edward Island, Newfoundland, and the West Indies. Lowe & Chamberlin, Montreal.
- (1872): "The Canadian census of 1871". *Canadian Monthly and National Review*, 1(2).
- KELLY, W. (1834): *On the Medical Statistics of Lower Canada. Transactions of the Literary and Historical Society of Quebec*, 3: 193-221.
- KLEIN, J. L. (1997): *Statistical visions in time. A history of time series analysis, 1662-1938*. Cambridge University Press, Cambridge.
- LE BRAS, H. (2000): *Naissance de la mortalité. L'origine politique de la statistique et de la démographie*. Le Seuil/Gallimard, Paris.
- LE BRAS, H. and SANDRINE B. (eds.). (2000): *L'Invention des populations. Biologie, idéologie et politique*. Éditions Odile Jacob, Paris.
- LEBRUN, I. (1833): *Tableau statistique et politique des deux Canadas*. Treuttel et Würtz, Paris.
- LICOPPE, CH. (1996): *La Formation de la pratique scientifique. Le discours de l'expérience en France et en Angleterre (1630-1820)*. La Découverte, Paris.
- MALTHUS, T. R. (1798): *An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society, with remarks on the speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and other Writers*, London, J. Johnson; *Essai sur le principe de population*. Éditions Gonthier, Paris, 1963.
- PETTY, W. (1662): *A treatise of taxes & contributions*. London.
- (1683): *Another essay in political arithmetick, concerning the growth of the City of London: with the measures, periods, causes, and consequences thereof 1682*. London.
  - (1687a): *Five Essays in Political Arithmetick, viz. I. Objections from the City of Rey in Persia, and from Mons<sup>r</sup> Auzout, against two former Essays, answered, and that London Hath as Many People as Paris, Rome and Rouen Put Together. II. A Comparison between London and Paris in 14 Particulars. III. Proofs That at London, Within its 134 Parishes, Named in the Bills of Mortality, There Live About 696 Thousand People. IV. An Estimate of the People in London, Paris, Amsterdam, Venice, Rome, Dublin, Bristoll and Rouen, With Several Observations Upon the Same. V. Concerning Holland and the Rest of the VII United Provinces*. London.
  - (1687b): *A Treatise of Ireland, 1687. The Elements of Ireland and of its Religion, Trade and Policy*.
  - (1888): *Essays on mankind and political arithmetic*. Cassell & Company Limited, London.
  - (1899): *The economic writings of Sir William Petty, together with the observations upon bills of mortality, more probably by Captain John Graunt*. 2 vols. Charles Henry Hull, Cornell University.
- REUNGOAT, S. (2004): *William Petty, observateur des Îles britanniques*. Éditions de l'Institut national d'études démographiques, Paris.
- TACHE, J. (1872): *Le Recensement du Canada, 1871*. Ottawa.

## CAPÍTULO 6

# La comisión civiale (1835): Un debate temprano sobre el uso médico de la Estadística

JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ  
JESÚS BASULTO SANTOS  
FRANCISCO JAVIER ORTEGA IRIZO  
Universidad de Sevilla

### Jean Civiale, la litotomía y la litotricia

La piedra de vejiga urinaria fue una enfermedad frecuente en el mundo occidental. Lo era, por ejemplo, a finales del siglo XVIII y principios del XIX, época a la que hace referencia la investigación del urólogo Jean Civiale (1792-1867). Curiosamente, dicha enfermedad ha desaparecido casi por completo en los países desarrollados.

En *The Cambridge World History of Human Disease* encontramos, en el capítulo dedicado a las piedras urinarias: “*Las principales formas de urolitiasis consisten en piedras de extensión superior formadas dentro de los riñones o uréteres (piedras renales) y piedras de extensión inferior, formadas en la vejiga. Estas dos formas de urolitiasis se diferencian en la etiología, composición química y rasgos epidemiológicos, por lo que deberían ser consideradas dos enfermedades*

*separadas. La evidencia histórica ha mostrado un aumento asombroso de la incidencia de la piedra renal en los últimos 100 años. Hubo una disminución simultánea en la incidencia de la piedra de vejiga...*”

No se tiene certeza sobre la causa de la disminución de la piedra de vejiga en occidente; quizás, una interacción de factores dietéticos y consumo de líquidos... Igualmente misterioso es el incremento del número de afectados por piedras renales que, además, son más frecuentes en hombres que en mujeres.

En cambio, la piedra de vejiga sigue existiendo como un problema importante en los países en vía de desarrollo, casi con la misma epidemiología que tenía en Europa Occidental hace dos siglos. La mayor parte de los afectados son jóvenes varones de áreas rurales y empobrecidas. La encontramos con frecuencia en países del medio y lejano oriente y, también, en el norte y centro de África. Como síntomas, dolor e infección. El dolor de la piedra de vejiga suele ser más constante que la de riñón y casi tan insoportable como el de ésta. El sufrimiento que debía padecer el paciente era tan terrible que muchos de ellos se atrevían a arriesgar sus vidas buscando el alivio a través de la litotomía, o sea, de la fragmentación y extracción de la piedra por vía perineal, haciendo una incisión en la piel, en las proximidades del ano, hasta llegar a la vejiga (todo sin anestesia). Un procedimiento bastante rudo y con alta mortalidad (según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, litotomía: talla, operación cruenta para extraer los cálculos de la vejiga).

Los especialistas en esta técnica viajaban de ciudad en ciudad, practicando sus operaciones allí donde eran requeridos. Es curioso el dato ofrecido por Frère Jacques de Beaulieu (1651-1719) (la famosa canción infantil del mundo francófono “Frère Jacques”, probablemente, tiene su inspiración en este personaje tan famoso en la época, que nunca se ordenó monje, pero que se hacía llamar a si mismo como el título de la canción) que hace un recuento de 60 litotomías practicadas de abril a julio de 1697, produciéndose 25 fallecimientos, o sea, un 42 % de mortalidad (este especialista llegó a practicar más de 5000 litotomías a lo largo de su vida). Una publicación un poco más seria sobre resultados de litotomía la proporciona el mismo Cíviale tras recabar datos de distintos lugares de Europa. En ella, la mortalidad en litotomía se “reduce” a un 20%, lo cual no deja de ser aterrador. Informa, además, que es superior en hombres, pues en las mujeres era más fácil practicarles el corte del perineo por encima de la vagina. Para los hombres, la discusión se establecía entre practicar un corte intermedio (con frecuencia por la próstata) o un corte lateral (más cerca de la pierna). No nos debe extrañar la alta mortalidad de los datos de Cíviale. Por ejemplo, el centro de más prestigio en esta especialidad de Gran Bretaña, Hospital Norwich, publicó en *The Lancet* una mortalidad de 1 sobre 8 (más de un 12%), para 910 pacientes atendidos entre 1772 y 1862.

Al ser la litotomía tan temida y peligrosa, se empieza a considerar la idea de algún método por el cual el cálculo pudiera ser roto o disuelto en la misma vejiga sin necesidad de la cirugía abierta. De aquí han llegado hasta nuestros días varios informes de individuos que según se dice insertaron instrumentos por la uretra, y a través de ellos intentaron romper o reducir la piedra rompiéndola o limándola. A pesar de la autenticidad cuestionable de algunas de estas historias, su misma persistencia da testimonio de tal posibilidad. Con avances en la tecnología que permitieron la construcción de instrumentos más delicados, los pensamientos y las ideas de los cirujanos fueron llevadas al reino de la realidad en el primer trimestre del siglo XIX.

El primer instrumento del que tenemos un registro fiel fue presentado por un francés llamado Fournier de Lempdes, de Clermont-Ferrand. Estaba concebido para que, después de entrar en la vejiga, éste se abriese y atrapase la piedra, la cual, entonces, se desgastaría mediante un instrumento giratorio. Empleó este instrumento sobre un cadáver, mostrando su proceder a los miembros de la Academia Francesa, los cuales le animaron a seguir su trabajo pero, al parecer, no hizo prueba alguna sobre pacientes vivos.

En 1813, Gruithuisen de Estrasburgo publicó un trabajo que contenía gráficos de instrumentos que atrapaban el cálculo con un hilo al final de un tubo abierto, después de lo cual sería pulverizado por un pequeño rotor que también pasaba por el tubo. Al parecer, tampoco consiguió llevarlo a la práctica sobre algún paciente.



Jean Civiale

Sobre el mismo tiempo, Jean Civiale, de París (fundador del primer servicio de urología que existió en el mundo, en el Hospital Necker de París), comienza sus primeros experimentos sobre el tratamiento no quirúrgico de la piedra de vejiga. Sus primeras ideas fueron dirigidas hacia la disolución de la piedra con sustancias químicas. Diseñó un instrumento que debía pasar a través de la uretra y luego abrirse en un saco flexible que incluiría a la piedra. Con ésta en el saco, su intención era la de inyectar sustancias químicas que la disolvieran, las cuales, al estar dentro del saco, no dañarían la pared de la vejiga.

Para determinar la naturaleza química de la piedra, Civiale diseñó un instrumento que él llamó litotriptor. Éste, pasando a través de la uretra, abría tres dientes parecidos a un gancho que servirían para coger la piedra. Un taladro transferido por el centro del instrumento extraería hacia fuera una pequeña parte de la misma. El material así obtenido debía ser usado para determinar el mejor disolvente. Este instrumento, concebido en un principio para ser sólo un auxiliar al tratamiento disolvente, pronto demostró ser autosuficiente.

El saco para incluir la piedra fue un fracaso y las tentativas en la solución química fueron abandonadas.

Carta manuscrita fechada el 10 de junio de 1824, remitida por Civiale al Presidente de la Academia de las Ciencias de Orleans, ofreciendo el informe de su “Trabajo sobre la destrucción de la piedra en la vejiga sin la operación de litotomía”.

Antes de que pudiera usar su litotriptor, Civiale tuvo que demostrar que instrumentos directos, sin curva, podrían ser introducidos en la vejiga. A pesar de las aseveraciones de muchas personas en contra, él demostró que la uretra se podía dilatar y que instrumentos directos de buen tamaño podrían ser empleados con seguridad.

Entonces encontró que con el litotriptor, cuya intención inicial era sólo, como se ha dicho, la de conseguir una muestra, podría taladrar un agujero en la piedra, y si ésta fuese liberada y girada a un nuevo ángulo, un segundo agujero podría ser taladrado, y posteriormente muchos más. De este modo la piedra, tarde o temprano, sería debilitada hasta el punto en que sería desintegrada en pequeños pedazos que podrían ser evacuados por la orina. La litotricia era ya una realidad (según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, litotricia: operación de pulverizar o desmenuzar, dentro de las vías urinarias, el riñón o la vesícula biliar, las piedras o cálculos que allí haya, a fin de que puedan salir por la uretra o las vías biliares según el caso).

En 1823, Civiale usó este instrumento sobre un paciente vivo y poco después mostró su utilidad a dos miembros de la Academia Francesa que padecían el problema. Ellos dieron un informe favorable a la Academia de Ciencias con un típico comentario francés: “La litotricia es gloriosa para la cirugía francesa, honorable para su inventor y consuelo para la humanidad”. La Academia de las Ciencias le concedió el Premio de Montyon de 10.000 francos en 1827. En el período entre 1823 y 1827 él lo aplicó sobre 43 pacientes, de los que 42 fueron éxitos, según el propio Civiale.

Rápidamente, otros cirujanos mostraron su malestar sobre la autoría del instrumental. Además de Fournier de Lempdes y Gruithuisen, antes mencionados, Leroy D’Etiolles, Heurteloup, Jean Amussat, Rigal de Gaillac, Jacobsen, y Meirieux, todos presentaron sus instrumentales por ellos inventados. Hubo

M. Civiale le Président  
de l'Académie des Sciences & Belles-Lettres

M. Civiale le Président,

J'ai l'honneur de vous adresser le rapport fait  
à l'Académie des Sciences de Paris sur mes travaux pour  
la destruction de la Pierre dans la vessie, sans l'opération  
de la Cauté. Veuillez M'en croire le Président en faire  
un bon usage à l'Académie & lui en faire un bon  
usage. Je vous prie de m'en faire un bon usage &  
de m'en faire un bon usage.

M. Civiale le Président,

Votre très humble &  
très obéissant serviteur  
Civiale

Paris le 10 Juin 1824

au Grand Palais National

reclamaciones, denuncias y contradenuncias. Cada reclamación iba en la línea de que los útiles de los demás eran impracticables o peligrosos. De toda esta polémica, Civiale triunfa y queda como el primero que consigue la rotura mediante instrumental de un cálculo en la vejiga de un paciente vivo. El éxito se repitió muchas veces, mostrando que funcionaba sobre cientos de pacientes. Sin embargo, Civiale no era un vencedor amable. Siguió durante muchos años en un debate áspero con aquellos que le negaban el éxito en su procedimiento.

Con los resultados de sus operaciones y los que recabó de distintos hospitales europeos, Civiale presentó un informe a la Academia de las Ciencias de París en el que se comparaban resultados de ambas técnicas, litotomía versus litotricia y, usando como base un análisis estadístico sencillo, abogaba por el empleo de la litotricia, frente a la litotomía, como técnica para la eliminación del cálculo de vejiga. La Academia encargó a una comisión formada por cuatro miembros que analizase el trabajo de Civiale, la cuál presentó una memoria a la propia Academia en 1835. En la misma se analiza, en primer lugar, los datos que el urólogo francés emplea para comparar ambas técnicas. En segundo lugar, los comisionados incorporan un interesante debate sobre el papel adecuado del razonamiento estadístico en cuestiones terapéuticas. La pugna entre un tratamiento del paciente, considerado como individuo único, y un tratamiento genérico de la enfermedad obtenido del análisis estadístico de un colectivo (individuo versus agregado estadístico) estaba naciendo y, desde luego, sigue siendo un debate apasionante en la actualidad.

En 2001, la prestigiosa revista de epidemiología *International Journal of Epidemiology*, siendo consciente de la vigencia e interés del contenido del informe de la comisión, publicó una traducción al inglés del mismo, además de comentarios y reflexiones sobre su contenido por parte de cuatro prestigiosos epidemiólogos: Black, Matthews, Tröhler y Vandenbroucke. En el texto de Almenara et al. sobre historia de la Bioestadística encontramos una referencia al trabajo de Civiale y al de la propia comisión.

## La comisión

Para situar históricamente el informe de la comisión es necesario conocer que la memorización de éxitos y fracasos al quitar piedras de la vejiga se venía haciendo desde principios del siglo XVIII, dado que los médicos recibían más pacientes si demostraban una tasa de éxito más elevada. Por tanto, ellos comenzaron a recoger sus resultados anuales en tablas. O sea, el método de Civiale de comparación cuantitativa no era fundamentalmente “nuevo”. Su novedad fue la de ser capaz de realizar la comparación a una escala mucho mayor que la de sus predecesores, debido al apoyo del Ministerio de Instrucción Pública. Este apoyo del gobierno ilustra como para los estados la idea de la agregación había llegado a ser considerada como un método clave para plantear cuestiones consideradas de “asunto público”.

Los científicos que querían un refrendo de la comunidad científica presentaban su trabajo a la Academia que, a su vez, nombraba una comisión de expertos para que juzgase y elaborase un informe, el cuál era leído en el seno de la misma y después publicado. El trabajo de Civiale fue entregado a la comisión formada por Poisson (1781-1842), Dulong (1785-1838), Larrey (1766-1842) y Double (1776-1842), siendo este último el ponente.



**Siméon Denis Poisson**

Entre los cuatro nombres llama la atención el primero, Siméon Denis Poisson, conocido no sólo por su ley de probabilidad de los casos raros o su ley de los grandes números, sino también por su interés de llevar a la práctica las ideas probabilísticas emergentes, como lo demuestra, por ejemplo, su trabajo evaluando la corrección de las decisiones judiciales. Por tanto, seguramente el trabajo de Civiale le resultó atractivo. Lógicamente, era un partidario del movimiento “*Médecine d’observation*” iniciado por Pierre Charles Alexandre Louis (1787-1872), o sea, del empleo de la información cuantitativa en las conclusiones médicas, y que se considera un antecedente de la moderna “*Evidence Based Medicine*” (que representa el uso racional, explícito, juicioso y actualizado de la mejor evidencia científica aplicado al cuidado y manejo de pacientes individuales. Los partidarios de este movimiento opinan que fue el empleo de los métodos cuantitativos el camino a través del cual la medicina se transformó en ciencia. Este último movimiento nació en 1992, en Ontario, Canadá).

No se comprende por qué formó parte de la misma el segundo miembro de la comisión, Pierre Louis Dulong. Pasó a la historia como un reconocido químico, descubridor del tricloruro de nitrógeno, e investigador sobre condiciones de presión, volumen y temperatura de los gases. Aunque su formación inicial fue la de médico, ejerciendo la medicina durante su juventud, sin cobrar nada por sus servicios, especialmente a los más necesitados, por lo que no debe extrañar su fracaso en esta profesión, razón por la cual se orientó hacia la química. Quizás, debido a sus conocimientos iniciales de medicina fue llamado a formar parte de la Comisión Civiale.



**Dominique Jean Larrey**

Respecto al tercer comisionado, Dominique Jean Larrey, tenemos que decir que era conocido como el mejor cirujano militar de Francia, siendo además una persona

muy cercana a Napoleón. Parece normal que un cirujano militar interviniese en este caso, donde se produce un análisis de datos numéricos, dado que la medicina militar era más numérica que la civil (era fundamental mantener un suficiente número de hombres aptos para la lucha). Napoleón, que murió veintiún años antes que él en su destierro de Santa Elena, le legó cien mil francos y en su testamento decía que era el hombre más virtuoso que había conocido. En 1806 presidió la *Société de Médecine de Paris*, de la que fue miembro desde su fundación en 1796. También, fue miembro de la Academia de Medicina desde 1820. En varias ocasiones se le bloqueó el ingreso en la de Ciencias, que por fin logró en 1829, la cual le encarga formar parte de la comisión Civile en 1835.

El ponente, y cuarto miembro de la comisión, era François-Joseph Double, es descrito como el representante del establishment médico en la misma. Para éste, el razonamiento probabilístico era útil en las comparaciones científicas, pero al final la ciencia de la medicina descansa sobre el diagnóstico clínico, razonando sobre causa y efecto, y tratamientos individualizados. En posteriores debates sobre el mérito de la “*Médecine d’observation*” (después de 1835), Double se distancia cada vez más, llegando a convertirse en un antagonista.

Con estos comisionados la segunda parte de la memoria, dedicada a la “interpretación” del uso del razonamiento probabilístico en medicina, es un documento histórico importante y, al mismo tiempo, cercano en muchos aspectos a debates actuales. Se refleja la combinación de ideas de uno de los más famosos especialistas en cálculo de probabilidades, con la de uno de los más importantes cirujanos de la Francia del siglo XIX, y con el contrapeso apropiado del establishment médico de la época.

## La primera parte de la memoria

Como ya se ha dicho, la memoria tiene dos partes bien diferenciadas. En la primera los comisionados comienzan su discurso insistiendo en lo intolerable que resultaba la enfermedad por su continuo dolor y por la “predisposición a la tristeza” del que la padece. Después se adentran en disquisiciones más o menos ambiguas, con una ambigüedad muy calculada, sobre si la enfermedad es o no hereditaria, sobre si afecta más a los hombres que a las mujeres, sobre la edad más frecuente en que aparece (en muchos casos, en menores de 14 años), sobre si hay diferencias en cuanto a su frecuencia entre países o regiones, o sobre si la situación social influye en la aparición de la enfermedad. Sobre esto último leemos:

*Sin duda, se cuenta un mayor número de afectados por el cálculo en las clases más penosas; pero es que, por una parte, estas clases son por desgracia las más numerosas; y por otra parte, desgraciadamente, también ocurre que sobre estas clases pesan más todas las cargas de la vida material, en particular las enfermedades.* (Este fragmento extraído de la memoria y los demás que aparecen

en este punto y en el siguiente son traducción propia de la original publicada en francés).

Después hablan sobre las recidivas de la enfermedad e introducen la afirmación de Civiale sobre la ventaja de la litotricia en este aspecto: *El Sr. Civiale afirma que las enfermedades de la vejiga y de sus anexos cesan más rápidamente y de una manera más tajante después de procederlas con litotricia, que después de efectuarles las maniobras de corte. El Sr. Civiale añade que hay siempre más o menos peligro de repetir la operación de cistotomía<sup>1</sup>, mientras que apenas si hay de reiterar la litotricia.*

Sobre los métodos propuestos para la resolución del problema, la comisión los resume en tres:

*Primer método.- Se ha intentado en vano, es cierto, hasta el presente, disolver los cálculos de la vejiga por la acción de pretendidos litotríticos indirectos o directos, generales o locales.*

*Segundo método.- Se ha buscado liberar a los pacientes de sus cálculos por medio de incisiones, de secciones, a menudo muy variadas, pero siempre por vía de diéresis o por operación con instrumentos cortantes.*

*Tercer método.- Se han extraído los cálculos a través del canal de la uretra sin incisión alguna, y lo más frecuente con la ayuda de una rotura mecánica previa.*

Deliberadamente, la comisión obvia hablar del primer método, dado que el trabajo presentado a su valoración no lo contemplaba, aunque añaden que “*al final de su trabajo, el Sr. Civiale deja de pasada algunas líneas de reprobación y como de menosprecio sobre los esfuerzos científicos que tendrían por objeto la disolución intestinal de los cálculos*”. Los ponentes comentan que ha habido otros intentos de comparación numérica (*Varias veces ya, en la historia de este arte, se ha invocado el poder de las cifras...*) para apreciar el procedimiento alternativo a la litotomía (lo que confirma los intentos anteriores a Civiale), pero opinan que esas comparaciones se han realizado sobre bases poco exactas, sin detalle, sin control. A continuación, los comisionados muestran por primera vez las cifras empleadas por Civiale para llevar a cabo la comparación entre ambos métodos:

*En el trabajo del que tenemos el encargo de hacer conocer a la Academia, el Sr. Civiale ha conseguido reunir en total más de cinco mil casos, todos proporcionados por la práctica de los más grandes cirujanos actualmente existentes en Europa; he aquí las conclusiones generales a las que ha llegado. Sobre 5.715 operaciones de corte (por incisión) que él ha podido analizar, encuentra 1.141 muertos, 4.478 curaciones completas, y una centena de enfermedades como consecuencia de la operación. Así, en los únicos casos en los que se conocen bien los resultados, la mortalidad es de alrededor de un quinto*

<sup>1</sup> El término cistotomía es usado aquí como sinónimo de litotricia.

*para todas las edades. Ahora bien, es bueno recordar que más de la mitad de estos enfermos no habían alcanzado los catorce años; y se sabe que a esta edad las posibilidades de curación son al menos el doble.*

*Por el contrario, estas mismas tablas comprenden un total de 257 pacientes operados de litotricia, y entre los cuales no hubo más que seis muertos, y aún sobre este número apenas si había dos o tres individuos con la edad menor de 14 años; lo que no da ni una muerte entre 42 pacientes operados por litotricia. Los datos, a simple vista, son contundentes: 20% de mortalidad en litotomía frente al 2% de litotricia.*

La información numérica aportada por Civiale en el caso de la litotomía nos sorprende. La recogida de datos de distintos hospitales europeos, la selección de los mismos, el acercamiento a sus colegas para solicitarles esa información, la tabulación..., todo debió suponer un enorme esfuerzo y, no deja de despertar nuestra curiosidad sobre cómo se produjo todo ese proceso.

En buena lógica, los ponentes no quieren hablar de verdades absolutas. No se debe rechazar por completo la litotomía. Admiten que, en determinadas circunstancias del paciente, puede incluso ser preferible a la litotricia. Esto no impide el salto de lo particular a lo general, en el caso de la comparación.

## **La segunda parte**

Podemos decir que es a partir de aquí cuando comienza la segunda parte de la memoria, donde los ponentes comentan el papel de la probabilidad y la estadística en medicina. De nuevo, debió haber motivos para ello: En 1812 Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) publicó *Théorie analytique des probabilités*. La aplicó al estudio de los fenómenos naturales y llegó a tener mucha influencia en los años veinte del siglo XIX. Por otra parte, la estadística ya contaba entonces con tradición en el terreno de los estudios demográficos y sanitarios (uno de los antecedentes se había producido en Londres, con las estadísticas de causas de muerte publicadas por Graunt en 1662). Por tanto, el debate estaba abierto.

Los ponentes advierten sobre la influencia de las modas en la investigación médica: *La medicina, en la que los propios trabajos son difíciles, lentos, sin resplandor y sin gloria, ha procurado con demasiada frecuencia juntarse con las ideas que la opinión del día han puesto de moda. Es así que en este momento, sin cesar se quiere aplicar la estadística a la mayor parte de las cuestiones trascendentes de la terapéutica. Ahora bien, en este caso la estadística no es otra cosa, en el fondo, que un ensayo de aplicación del cálculo de probabilidades.*

La discusión se centró en el significado del razonamiento numérico para el paciente individual. Se sostenía que “*il n’y a en médecine que des individus...*”.

Como se ha mencionado, en el seno de la comisión, Double iba defendiendo cada vez más esta opinión.

Es interesante observar cómo se va elaborando cautelosamente los argumentos. Una base importante es que las probabilidades sólo pueden ser calculadas sobre unidades iguales y sobre números grandes. Sin embargo, las personas no son iguales, y un médico que trata un paciente tiene una información sobre él que lo hace diferente del resto de pacientes. En cambio, la estadística necesita desposeer de esas diferencias a los individuos.

Leemos en la memoria: *La estadística puesta en práctica, que en definitiva siempre es el mecanismo funcionando del cálculo de probabilidades, apela necesariamente a las masas infinitas, un número ilimitado de casos, no sólo con vista a aproximarse lo máximo posible a la verdad, sino también con el de conseguir hacer desaparecer, de eliminar, tanto como sea posible, y con la ayuda de procedimientos conocidos, las numerosas fuentes de error tan difíciles de evitar.*

*Todo difiere en el orden médico; los casos son siempre para nosotros muy limitados por la naturaleza misma de las cosas; lo son aún más por la imposibilidad para nosotros de conocerlos y de reunirlos todos. Al lado de algunas centenas de casos publicados por un pequeño número de hombres que escriben mucho, existen millares de casos perdidos en la oscuridad de la clínica muda de esa multitud de médicos que, en medio de una utilidad práctica de todos los instantes, no pueden en absoluto escribir de todo, ni incluso tienen apenas tiempo de leer un poco. Así pues, en Medicina práctica, los casos son demasiado poco numerosos para entrar en el dominio del cálculo de probabilidades; y además, el mayor número de esos casos escapan muy evidentemente al cálculo, a la comparación, al control: ahora bien, todos estos casos perdidos, ¿qué resultados introducirían en la cuestión, en esta aritmética médica? Nadie osaría decirlo.*

La exigencia de rigor en una investigación científica queda manifiesta en el siguiente párrafo y, desde luego, se nos antoja muy actual para los que, con frecuencia, llevamos a cabo análisis de datos: *Los geómetras que se han entregado al cálculo de probabilidades han insistido todos en la necesidad de aportar el mayor rigor, la atención más constante en la clasificación de los casos, con el fin de evitar estas asociaciones irreflexivas, inexactas, que conducen tan rápido al error. Todos exigen que no se hagan entrar en un mismo cálculo nada más que casos del mismo género, casos comparables entre ellos, en fin, casos que hayan sido sometidos a un examen, a un análisis previo, de tal manera que se llegue a fijar, tanto como sea posible, las condiciones de analogía o de disparidad que reúnen.*

Y se llama la atención sobre los dos posibles errores que se pueden cometer: *Aquí debemos temer tanto los errores que nacen de la naturaleza misma de la*

*cuestión como los errores que pueden introducir los hombres que buscan resolverla.*

Aunque se va acentuando la utilidad de los datos de la práctica médica, estos nunca dirán nada sobre el futuro del paciente individual que el médico atiende. Los datos ofrecen una especie de marco general: pueden proporcionar comparaciones generales entre tratamientos y, así, ofrecer directrices generales. Que las conclusiones sobre datos particulares puedan ser aceptadas no es sólo un asunto de los datos, sino también del razonamiento lógico que subyace tras los datos (porque los datos médicos son imperfectos y no llevan a probabilidades). Además,

*...la duración de la enfermedad anterior a la operación, la variedad de los estragos que la presencia de la piedra ha causado sobre la vejiga y sus dependencias, la constitución general del enfermo, su disposición tanto moral como física, en el momento de la operación, el trabajo incesante del organismo abandonado a la acción más o menos poderosa de la vida y de sus funciones; tales son algunas circunstancias importantes que, para los médicos, convierten los casos tan variables, tan accidentados, tan poco comparables entre ellos, tan susceptibles de estas numerosas fuentes de error que ninguna ley de probabilidad podría abrazar.*

Los ponentes mencionan el viejo adagio de Morgagni “*Non numerandae sed perpendendae observationes*” (no tendrían que contarse, sino ponderarse los hechos), el cual fue ligeramente, aunque significativamente, cambiado para el lema de la “*Société de Médecine d’Observation*” en “*numerandae et perpendendae*”. Está claro que los ponentes se mostraron más cautelosos. Se puede adivinar que esto fue debido a las discusiones entre Poisson, el matemático, y Double, que se iba distanciando cada vez más de la vía tipo Civale de hacer investigación médica.

Si entendemos bien a los ponentes, ellos sostienen que hay que juzgar dos veces. El primer juicio es si hay que aceptar el veredicto de los datos comparativos, que es tanto un asunto del razonamiento lógico sobre la investigación y los principios tras de sí, como de los mismos datos. El segundo juicio es si el veredicto total se aplica a un paciente particular individual. Al final de la memoria, los ponentes incluyen esta cita del matemático Lacroix: *La bondad de este cálculo depende, aquí como en todas partes, de la elección de los datos, y a continuación, del buen empleo que se haga; y este buen empleo no puede consistir más que en el examen detallado de las circunstancias de cada dato, en el cuidado de la descomposición tanto como sea posible, con el fin de no tener que pronunciarse más que sobre proposiciones de una igual simplicidad, de una igual evidencia y sobre todo con el fin de tener su espíritu en guardia contra toda parcialidad a favor del resultado cualquiera que pueda ser.*

De alguna forma la comisión habla del uso de la estadística como análisis confirmatorio cuando redacta: *Añadimos que, sobre casi todos los puntos, el*

*cálculo sólo da lo que la inducción había ya proporcionado, lo que la razón sola habría, por lo menos, hecho sospechar.*

Tales temas han sido discutidos por otros investigadores posteriores. Greenwood, el primer profesor de epidemiología de la London School of Higiene escribe en 1936 en su informe sobre Pierre Charles Alexandre Louis y la “Société de Médecine d’Observation” lo siguiente:

“Él no es un actuario aconsejando a una empresa aceptar (o rechazar) riesgos, sino que es un médico llamado para ayudar a un enfermo”. Esto es un eco, con una distancia de un siglo, de lo que leemos en el informe sobre el trabajo de Civiale: *¿Qué resultado puede esperarse si uno trata de determinar con que edad fallecerá Pedro a partir de una tabla general de mortalidad?*

Los ponentes terminan su informe de manera casi similar a como hoy día lo hace un tribunal de tesis doctoral: felicitando al Sr. Civiale por el trabajo presentado y animándolo *“a continuar sus investigaciones estadísticas con el objetivo de hacerlas más numerosas, más circunstanciadas y más concluyentes, y, al mismo tiempo, tienen el honor de apelar sobre este trabajo la aprobación de la Academia.”*

## **Conclusiones**

El trabajo que fue presentado en la Academia Francesa desempeñó un importante papel en dos controversias: el mejor tratamiento en las piedras de la vejiga, y el papel del razonamiento probabilístico en medicina. La primera controversia fue pronto ganada por los litotriptores: la mortalidad al eliminar la piedra de la vejiga mediante instrumentos transuretrales era lo suficientemente menor como para llevarles al triunfo. El segundo necesitó el transcurso de más de un siglo para que volvamos a ver el renacimiento del interés por el razonamiento numérico en medicina clínica. Varios de los temas de la segunda controversia todavía desempeñan su papel en debates de hoy sobre la utilidad relativa del razonamiento numérico, y sobre el papel relativo de la perspicacia y los datos numéricos en la decisión de cuál proposición científica es verdadera. En verdad, podríamos concluir que *El nivel de debate no ha avanzado mucho desde Civiale y las espadas siguen cruzadas* (Davey Smith, Egger, 1998), una observación que podría ser un punto de partida para la autorreflexión sobre todos los aspectos, para llegar a un mejor entendimiento mutuo.

## Bibliografía

- ALMENARA BARRIOS, J., SILVA AYCAGUER, L. C., BENAVIDES RODRÍGUEZ, A., GARCÍA ORTEGA, C. y GONZÁLEZ CABALLERO, J. L. (2003): *Historia de la Bioestadística: la génesis, la normalidad y la crisis*. Cádiz: Quorum Editores.
- BLACK, N. (2001): “Commentary: That was then, this is now”. *International Journal of Epidemiology*; 30: 1251.
- DAVEY SMITH, G. y EGGER, M. (1998): “Incommunicable knowledge? Interpreting and applying the results of clinical trials and meta-analysis”. *J Clin Epidemiol*; 51: 289-95.
- EVIDENCE-BASED MEDICINE WORKING GROUP. (1992): “Evidence-based Medicine”. *JAMA*; 286: 2420-2425.
- GALBRAITH SIMMONS, J. (2002): *Doctors and Discoveries. Lives that Created Today's Medicine*. Boston, NY, Houghton Mifflin Company.
- GREENWOOD, M. (1986): *The Medical Dictator and Other Biographical Studies. (1<sup>st</sup> Edn 1936)*. Reprinted, BMA House: Keynes Press, 73–88.
- KIEFER, J. H. (1968): “Jean Civiale (1792-1867)”. *Investigative Urology*; Vol. 6, n° 1, 114-117.
- MATTHEWS, J. R. (2001): “Commentary: The Paris Academy of Science report on Jean Civiale's statistical research and the 19th century background to evidence-based medicine”. *International Journal of Epidemiology*; 30: 1249-1250.
- POISSON, S. D., DOUBLE, F. J. ET AL. (1835): “Rapports: Recherches de Statistique sur l'affection calculeuse, par M. Le docteur Civiale”. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 1835;1:171–72. La versión en inglés: Statistical research on conditions caused by calculi by Doctor Civiale traducido para la *International Journal of Epidemiology* by Angela Swaine Verdier, 2001; 30: 1246-1249.
- STEINBOCK, R. T. (1993): “Urolithiasis (Renal and urinary bladder stone disease)”. En: Kiple FK (ed.). *The Cambridge World History of Human Disease*. Cambridge: Cambridge University Press, 1088–1092.
- TRÖHLER, U. (2001): Commentary: ‘Medical art’ versus ‘medical science’: J Civiale's statistical research on conditions caused by calculi at the Paris Academy of Sciences in 1835. *International Journal of Epidemiology*; 30: 1252-1253.
- VANDENBROUCKE, J. P. (2001): Commentary: Treatment of bladder stones and probabilistic reasoning in medicine: an 1835 account and its lessons for the present. *International Journal of Epidemiology*; 30: 1253-1258.



## CAPÍTULO 7

# Estadística: Información para Organización y conocimiento de los Estados

JUAN IGNACIO CASAL LINO

Agencia Estatal De Administración Tributaria

*Dios creó los números, los humanos los manejan y hacen estadísticas. El Coyote sus plantas, sin el PCC, o con él sigue y las clasifica, hay que aprender.*

*Yo he seguido toda mi vida el precepto de que la verdad es sagrada, que es nuestro deber buscarla y defenderla, sin considerar que sea agradable o no.*

**Kolmogórov, 1984**

### Introducción

Para atender a las preguntas simples del ¿por qué? y ¿para qué?; he tratado de encontrar alguna forma de aclaración, que no necesariamente está en la mayor racionalidad o en la mejora global, puede verse simplemente como un ejercicio de entretenimiento o de distracción o de encuentro y lucidez. En otras palabras, ¿en dónde estoy?, ¿de dónde vengo?, ¿a dónde voy?, y en ese sentido valoro los ejercicios de reflexión, y de debate (si procede), y un poco en ello está el origen y fin de esta pequeña ponencia, en relación al fin de la Estadística como información;

es frecuente que en su estudio la estadística se pierde en su formulación y desarrollo lógico-matemático, o en las formas de aplicación para las que se estudia, atendiendo muy poco a su evolución, hasta donde se pueden considerar como importante y necesaria, y fácil es ver que se maneja con cierta trivialidad.

Me ha impresionado y motivado para la búsqueda de aclaraciones, la expresión que se encuentra en la introducción de la traducción facsímil, que editó el INE, del libro de Sampaio -*Elementos de la Ciencia de la Estadística*-, “*El gobierno quiere de buena fe proteger la agricultura, las manufacturas, y el comercio; pero faltándole datos estadísticos, ó teniéndolos mezquinos, insuficientes e inexactos, sus disposiciones generalmente perjudican mas que protegen á esos tres ramos capitales de la industria*”(pag.7). En distintos textos se hace referencia a que el padre, o el primero en emplear la definición y precisión del termino estadística (en latín y su traducción a Statistik en alemán), fue el Prof. G. Achenwall, que nació en Elbing en 1719, se incorporó a la Universidad de Goettingue, en donde dio un curso de “*Notitia política vulgo statistica*”, y murió el 1º de mayo de 1772. La expresión y su sentido tienen un desarrollo anterior, como veremos; pero si se admite que la precisó, la definió, y la alejó de algunas otras expresiones de cierta ambigüedad como la aritmética política, sin con ello acercarla a lo que hoy se entiende por azar y precisa como probabilidad.

Para la definición, utiliza el Estado como “*sociedad de familias, reunidas bajo un mismo jefe, para asegurar su prosperidad (Glückseligkeit) común*” y precisa Estadística como: “*la ciencia del conjunto de lo que es realmente notable en un Estado, o de sus fuerzas y recursos presentes morales y materiales,*” ambas se encuentran desarrolladas en los libros de Sampaio, o el que comentaremos con más detalle de M. Block.

Se insiste algo en estas referencias para recalcar que, la estadística está en sus orígenes muy ligada a la organización de la Sociedad, y muy lejos de los orígenes del azar, la probabilidad, o la aleatoriedad. Aunque ahora con su desarrollo está beneficiada de la metodología científica de la probabilidad y los métodos de análisis de datos y se encuentra más próxima, pero su origen y fin fueron distantes.

En los orígenes de la Estadística tenemos que situarnos en los comienzos de la sociedad, de la comunicación y formación de la organización pública, las vías de mejoras y de participación, la distribución de las funciones de los miembros, y los problemas que pueden surgir si no se tienen registros de las unidades que forman el conjunto, registros o censos que empiezan con los orígenes de las sociedades humanas cuando comienzan el uso de la racionalidad para la organización de la sociedad.

Las múltiples fuentes de información y de mejora de todas las partes, en distintos conceptos de organización social, y aunque no es en algunos casos de fácil recapitulación, sin duda está ligado a los distintos orígenes culturales, y las formas de transmisión o de reconocimiento. Se tiene la información de algunos textos de

proximidad a los principios de las religiones, o meditaciones sobre origen y destino de los seres humanos, que en muchos casos para los Europeos los situamos en la cultura greco-romana, y el desarrollo del Derecho Romano, pero se mencionan los censos en textos anteriores como el referenciado en la segunda parte de Chou-King que recoge Confucio, como indicación del Censo realizado por orden del Emperador Yao en el siglo XXIII a.c.; y casi con seguridad que sin la debida transmisión del texto, las culturas Indias, Incas, Aztecas al empezar a organizarse en sociedad tenían que distribuir funciones, seguiremos los problemas y prioridades de la organización de la Sociedad, a partir de las reflexiones y principios que plantea Platón con sus contertulianos, aunque también se podría ver en Aristóteles, desde los principios de ética, hasta la integración en sus escritos sobre política, desde la base que el hombre es un animal social.

## Principios de organización de la Sociedad

En las reflexiones que se encuentran sobre los principios de organización de la sociedad y el salto de la sociedad familiar a la de ciudad-estado; se disponen desde los conceptos para la buena definición, de las unidades de referencia que las pueden formar en su participación, y de los fines que deben perseguir o procurar, haciendo con ello comentarios y disquisiciones sobre las distintas formas de organizar el gobierno y sus posibles consecuencias. El planteamiento del libro-*“La República o el Estado”*- de Platón, es más de teoría y de principios que deben atender para la buena consecución de los fines del Estado *“en que la felicidad no sea patrimonio de un pequeño número de particulares, sino común a toda la sociedad”* (420c), y se desarrolla con la participación de tertulianos amantes del saber, como Sócrates, Trasímaco, Glaucón. Aristóteles hace planteamientos de orden lógico, llegando a ver algunos de los problemas que se plantean en gobiernos de la época; se podría decir que Platón pone en el libro algunas de las formas de debate, de un modo abierto, y Aristóteles parece mas dirigido a como hay que construir.

Las relaciones entre las virtudes y la felicidad de las personas, las hacen corresponder con las de los estados, buscando el Estado perfecto en el que cumpla en buen relación y armonía las cualidades de *“prudente, valeroso, templado y justo”* (427a), y a su vez la prudencia se considera como la que se puede derivar del buen consejo, *“puesto que no es la ignorancia sino la ciencia la que enseña a bien deliberar.”* (428b); esto lleva también a la necesidad de reflexión sobre ¿qué ciencia?, ya que no es mejor para la construcción del estado y su mantenimiento, el conocimiento o la ciencia de la agricultura o del comercio, sino la ciencia de guardar el estado en el cumplimiento de sus principios, que dice Platón que *“reside en aquellos magistrados que llamamos guardianes perfectos”* (428d).

De modo similar en los razonamientos de Aristóteles se insiste en la necesidad del conocimiento y la mejora de la información para el buen gobernar, y debe de buscarse el que pueda encontrarse como mejor, el más próximo al termino medio o a la clase media: *“Toda ciudad se compone del elemento cualitativo y del cuantitativo. Llamo elemento cualitativo a la libertad, la riqueza, la educación, la nobleza, y elemento cuantitativo a la superioridad numérica.”* (pag. 254). Y la buena conservación es la que a la vez que se busca el termino medio de equilibrio o armonía que resulta mas justo y mejor para el conjunto de los ciudadanos del Estado; y ello se consigue con buena independencia de los poderes del Estado: poder deliberativo, en donde se delibera y se legisla; poder de magistratura, en donde se procede para ejecutar, y poder judicial, que podrá mantener las garantías del debido cumplimiento y los juicios y sanciones para los incumplimientos.

En los planteamientos de estos textos, se hace mención importante a la distinción entre opinión y conocimiento, y esto a su vez se corresponde con el que busca la verdad y el saber en las cosas inmediatas y en sus múltiples formas, pero no en la esencia misma: le dice Platón a Glaucón, *“¿Admites que, lo que las apariencias son a las cosas que ellas representan es la opinión al conocimiento?”* (510a) ;y más adelante, en el libro (capítulo) VII, se puede leer que: *“El conocimiento de la unidad, ..., es una de las cosas que elevan el alma -(El sentido de la época es de sabiduría, filosofía, amor a la verdad)- y la vuelven a la contemplación del ser”, “¿no sucede igualmente con todo número, cualquiera que él sea? –¿Cómo no? –Pero la aritmética y la ciencia del cálculo tiene por objeto el número. Por consiguiente una y otra son aptas para conducir al conocimiento de la verdad.”* (525a). *“Demos, por lo tanto, Glaucón, una ley a los que hemos destinado en nuestro plan a desempeñar los primeros puestos, para que se consagren a la ciencia del cálculo, para que la estudien, hasta que hayan llegado a conocer la esencia de los números, no para servirse de esta ciencia en las compras y ventas, como hacen los mercaderes y negociantes”* (525c) .

En las referencias anteriores, y algunas otras, reflejan la consideración de ciudadanos y sus derechos en los censos, lo que da lugar a distintas consideraciones de organización del Estado, como aparecen indicaciones de trabajos, salarios, y distintas formas de clasificar las actividades. Y en el conjunto del Estado se puede hablar de ricos y pobres, y los extremos que llevan al <Estado enfermo> por las desigualdades y las roturas de armonía o equilibrio. Y todo ello es para acompañar en la reflexión de lo que se mantiene en la historia de la Estadística, que M. Levy denomina correctamente, a mí entender, *“La Información Estadística”*.

## **Proceso-progreso de la Organización Estadística**

En todos los países, sociedades, estados se ha ido haciendo recogida de información y tratamiento de clasificación, codificación para el tratamiento y

presentación de datos que interesa a los propios ciudadanos y a los gobiernos. Fundamentalmente en registros civiles, en registros de propiedad, en censos de población, etc. En la península Ibérica, las conquistas de los árabes eran reflejadas con los datos de las ciudades, habitantes, viviendas, fábricas, e incluso de intercambios comerciales que daban lugar a los “*derechos de aduanas, llamados almojarifazgos*” (cap. II de R.H de la Est. En España, pag. 13.).

En otros momentos de su proceso histórico, especialmente a partir de Felipe II, se encargaron puntualmente la recogida de datos de sus riquezas o de las poblaciones de sus conquistas. Son de destacar, el Catastro del Marqués de la Ensenada, los censos de Floridablanca, y todo ello detallado se encuentra en las publicaciones íntegras que recuperó el INE, y se puede ver en el libro del Resumen Histórico que elaboró Anselmo Sanz Serrano, con motivo del centenario de su creación.

A nivel Europeo-Internacional se considera el libro *Domesday*, encargado por Guillermo I el conquistador, como una de las obras mas completas y sistemáticas de recogida de información para el conocimiento de un estado, pero no deja de ser una forma de recogida de información administrativa para reforzar el poder del gobernante, exigiendo juramentos de fidelidad a los propietarios, así como al clero.

Es a partir de finales del siglo XVIII y principios del XIX, cuando los distintos Estados empiezan a considerar importante su organización, e inclusión de la necesidad de esa información en sus principios legales, Constitucionales, el desarrollo de las organizaciones para la información estadística se acelera y comienza a precisarse según las partes a que pueda afectar. La información estadística de población dio lugar a que comenzase el desarrollo de la orientación hacia la Demografía, que hoy con autonomía tiene su denominación como especialidad de estudio y rama científica del saber.

En las constituciones, o principios de organización del estado, curiosamente en donde primero se encuentra la referencia a los censos de los estados es en la Constitución de 1787 de los Estados Unidos de America, en su artículo 1º, sec. 2ª-3, - su redacción que admite la ambigüedad de referirse a Censo electoral o censo de población -, pero dio lugar a la creación del primer organismo oficial que se considera oficina de Estadística del Gobierno (Census Bureau), que dependió en principio del Departamento de Estado, y desde 1850 al 1900 pasó a depender del Departamento de interior, y en poco tiempo comenzó a encargarse de censos Agrarios, de comercio, etc.

En el libro, “*La Estadística, una guía de lo desconocido*”-que recoge parte de las múltiples aplicaciones que hoy pueden hacerse desde la teoría estadística, y en particular la que hacen Hansen y Bailar, sobre la aplicación para mejorar la calidad de los censos, se puede leer: “*En 1790, Thomas Jefferson entregó a George Washington, primer presidente de los Estados Unidos de América, los resultados del Primer Censo. Desde entonces, cada diez años, como marca la constitución*

*americana, el censo ha recogido la información básica sobre los habitantes de esta Nación. La importancia del censo en problemas tan actuales como la pobreza, la sanidad, la educación, los derechos civiles y otros, ha motivado la aparición de peticiones para que el período intercenso se reduzca de diez a cinco años a fin de disponer de una información más actualizada.”* (Cap. 23, pag. 309-10).

Las oficinas de Estadística generales y oficiales empiezan a surgir de forma precisa a partir del siglo XIX, con normativa legal, y funciones precisas, asignadas para reforzar su organización y mejora en los resultados, en Francia se crea en 1834 y asignada al ministerio de Comercio; En Bélgica y los Países Bajos en 1826, en 1830 que se separan los Estados, se mantienen la oficina en Bélgica, da buena cuenta de ello Quetelet, mientras que en los Países Bajos no reaparece hasta 1848, en Inglaterra la primera oficina general se considera de 1832, y así en todos los países europeos; una situación particular se puede encontrar en Alemania, que la primera que se considera es la oficina estadística de Berlín de 1805, pero en cada Estado se fue creando en distinto año según gobiernos y necesidades o exigencias, en el reino de Sajonia se considera que se crea en 1831, y en otros estados, o ducados, que formaban el conjunto de Alemania no llegan a crearse hasta la segunda mitad del siglo, (p. ej. Oldemburgo en 1855 y Hesse en 1861).

Los distintos orígenes, circunstancias, y prioridades de organización fueron dando lugar a la necesidad de acercamiento en los procedimientos de recogida de datos, y de definiciones o métodos, que permitieran las comparaciones, apareciendo las sociedades de coordinación, y los estudios sobre la integración, así como la necesidad de precisar lo comparable dentro de la heterogeneidad, en particular en Alemania se llegó después de distintas reuniones de las direcciones de las oficinas estadísticas de los distintos estados a la creación de la oficina Central en 1872 y se recoge desde las reuniones de los Congresos Internacionales de Estadística, y en particular del de Viena de 1857, y que podemos disponer con rigor gracias a la generosidad de INE al facilitar a los asistentes al 44 congreso del “Statistical International Institute” (ISI) las actas de los trabajos de las sesiones anteriores a la creación del ISI en Londres en 1885.

España, aunque como todas las unidades de un conjunto, tiene su formación y desarrollo propio, no está ajena al entorno y es en 1856 cuando se crea por Real Decreto, la comisión de coordinación e integración de la estadística oficial del Reino, siendo presidente del Consejo de Ministros, Ramón M. Narváez. Aunque los avatares de la historia le generaron modificaciones de objetivos, organización, prioridades y/o medios, la finalidad de que las cifras oficiales del Estado salían de esa organización, hoy INE, no admitieron duda en ningún momento.

Con todo este proceso, que se puede ver en distintos libros, aquí mismo referenciados, cabe preguntarse ¿Cuál es el papel del azar, de la aleatoriedad, de la Probabilidad? , y en que forma puede haber influido tanto, que en el siglo XX, y más en nuestros días, cuando se habla de estadística; o se piensa que es algo

matemático y difícil de acercarse a ello, o se pierde en lo que se presenta como opinión sometido a otros intereses, que no son la búsqueda de la verdad, y no goza de demasiado crédito, y su valor se lo da él que firma el análisis o estudio de la información, dejando como secundario la calidad y control de los datos que se recogen. Sin dejar por ello de valorar que la identificación en el que firma es el valor del respaldo de quien lo promueve y se compromete, y eso también existe en los empujes y avatares de las oficinas estadísticas oficiales.

## La Probabilidad, medida del azar-aleatoriedad

Los modelos que tratan de mostrar los comportamientos de cualquier sistema, que se encuentra o se forma, responden a la necesidad de buscar los principios lógicos que mas se aproximan a su justificación, que eliminan las incoherencias, o las contradicciones y permiten acercarse mejor a la realidad, para conocerla. La matemática desde principios de lógica, orden, y rigor trata de resolver los problemas que surgen, y generan contradicciones, o anulan la aceptación de los principios, o axiomas, que permitían aceptar unas reglas de comportamiento de los fenómenos de la naturaleza, o de la posible interpretación que se les daba; así se cuestionan los principios de Euclides y nacen otras formas de interpretación de la geometría, o se trata de aclarar si se pueden dar situaciones en que ¿si  $A > B$  y  $B > C$ , no necesariamente  $A > C$ ?. Esto es, que la transitividad o el orden no necesariamente tiene que mantenerse, situaciones que se pueden encontrar cuando hay aleatoriedad en modelos de juegos no equitativos.

Los principales problemas a los que no se encontraba la oportuna solución y daban lugar a debates, son por resoluciones de juegos o por sumas de infinitas unidades que podían no ver como solventarlos, o por no considerar los efectos conjuntos de dos variables distintas en el mismo problema, o simplemente porque una solución particular se quería extender fuera del mismo contexto que la permití. En los siglos XVII y XVIII, fundamentalmente desde Galileo, Newton, hasta Laplace tienen importancia muchos de los problemas que se planteaban. Con anterioridad Luca Pacioli publica “*Summa di arithmetica, geometrica, proportione, et proportionalita*” (Venecia- 1494), en donde introduce una parte de los problemas no habituales, entre los que deja referencia sobre repartos equitativos en juegos no finalizados, que dio lugar a que Huygens comentara la correspondencia entre Pascal y Fermat sobre “*Los razonamientos en los juegos de Azar*”. Estos problemas planteados, sobre los que se interesa Jacob Bernoulli, terminan con la publicación de “*Ars conjectandi*”, (arte de las conjeturas) que editó N. Bernoulli, quien presentó una tesis sobre la aplicación del arte de las conjeturas a problemas de derecho.(¿Cuándo legalmente se podría dar a una persona por fallecida?). Todo esto y algunos otros ejemplos sobre juegos, sus paradojas, la esperanza moral, o la paradoja de San Petesburgo y su forma de entender la solución se pueden ver en Cap.5 (pag. 211 y siguientes) del libro “*Los Bernoulli*”, donde también se indica

una primera referencia a la expresión de probabilidad, y a las expresiones de a priori, a posteriori.

La forma axiomática, que hoy se considera más rigurosa del concepto de probabilidad, está ligada a la teoría de la medida, y se puede indicar que la presenta Kolmogorov en 1933, a su vez ligada a un universo, o espacio muestral, con la sigma algebra de sus unidades; a su vez comienza el desarrollo de la introducción temporal en los propios conceptos, que da lugar a lo que llamamos procesos aleatorios o estocásticos.

La aleatoriedad, el azar, y sus deducciones para el estudio científico, permiten avanzar en muchas ramas de la ciencia, al tiempo que hace añicos uno de los principios de la ciencia, el de causalidad; recientemente un pequeño artículo divulgativo del Prof. Carlos Pajares -que fue Rector en esta Universidad-, “El azar en la individualidad” recordaba que sin el principio de incertidumbre no se podría comprender casi nada, empezando por la estabilidad en la materia. Ahora vuelvo a finales del siglo XIX.

### **Tratado teórico-práctico de Estadística. (Maurice Block)**

Es de origen Alemán, nacido en Berlín el 18 de Febrero de 1816 y murió en Paris el 9 de Enero de 1901. Publicó varios libros en particular por su referencia de interés actual, “L’Europe sociale et Politique” en 1861; y en 1878 “Traité Théorique- Pratique de Statistique” que se tradujo al Castellano (español) en Valencia 1888, y en todo caso estará a disposición de quien lo considere oportuno. M. Block fue funcionario desde 1844 del ministerio de agricultura y ahí se dedicó a organizar las estadísticas, aunque en 1862 lo dejó para dedicarse exclusivamente a la enseñanza y organización de debates sobre el papel y la necesidad de la Estadística en la organización del Estado. En 1880 fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias Morales y Políticas de Francia. Uno de sus trabajos de interés fue “El progreso de la Economía política después de Adam Smith”.

Voy a tratar de recordar y precisar los conceptos que busca atender y mejorar la estadística, para su aplicación en la organización de la sociedad, al tiempo que como metodología de estudio científico ya se reconocía que se abrían sus puertas en muchos campos del saber; El autor plantea cuatro partes ( o Libros ), en el conjunto del texto, el Libro I, es el de Historia; en el Libro II se plantean cuatro capítulos de fundamentos y teoría - Uno sobre ciencia y método; Dos, de leyes estadísticas; Tres, sobre límites de la estadística; y en el último las tablas de mortalidad y la vida media. Los otros dos Libros que desarrolla responden a los problemas y formas de organizar la Estadística en la Administración, y diferenciarla claramente de los posibles aprovechamientos estadísticos de los actos administrativos; y en el último libro se centra en la población que desde el ensayo

de T.R. Malthus, empieza a tomar cuerpo la demografía con desarrollo posterior autónomo.

Entiendo como importante y fundamental las aclaraciones que aporta para diferenciar; lo que es el método, de recogida y tratamiento de datos, del objetivo para la información del Estado, y sus principios que están mucho mas ligados a los principios de ética, moral y mejora general de la sociedad; pero para su adecuada consideración como método científico y como aplicación de ciencia de la medida se encuentra la búsqueda de la formalización y coherencia axiomática que permitirán que las deducciones formales adquieran valor de teoremas de indiscutible rigor matemático.

Al entrar en el apartado de la estadística considerada como ciencia indica: *“Estadística concreta y estadística abstracta, estadística descriptiva y estadística matemática, estadística política y estadística social, no son después de todo más que el anverso y el reverso de una misma medalla. Jamás hubiera existido la menor duda sobre este punto si el método estadístico no encontrase tan frecuentes aplicaciones en las otras ciencias, en la administración, y aún en los asuntos privados”* (pag. 70). Insiste que en todas las ciencias sus fronteras pueden ser poco precisas y de interferencia, p.ej., indica entre química, biología, y salud, se encuentran otros muchos en referencia a suelo, plantas y animales, que no tienen sus límites bien señalados. Y más adelante indica que los estadísticos están para reivindicar la demografía como dominio propio, aunque tampoco está cerrado hasta donde abarca, y por ello cita a M. Rümelin, que en 1863, contó sesenta y dos definiciones de estadística y el mismo ofreció la sesenta y tres al tiempo que decía “que no todo lo que se cuenta es estadística” (pag. 64). Y mas adelante se pregunta *“¿Es verdad, como decía la introducción al Journal of the statistical society de Londres (mayo 1888), que la estadística no discute las causas y no raciocina sobre los efectos?”*(pag. 67) y con sensatez se inclina, a mi entender, que en esa orientación de que los organismos de estadística, y los estadísticos como profesión, trabajan en la recolección rigurosa de información como un trabajo puramente técnicocientífico.

De nuevo el autor vuelve a replantear sobre el método estadístico, que debe no solo atender al procedimiento de recogida de datos, sino también al control de la calidad de los mismos y la búsqueda de las formas de presentación mas homogénea y comparable; toda observación debe ser comprobable y comprobada, la estadística no tiene otro método que el de las ciencias exactas; pesa cuenta y mide con cuidado, dejando claro y preciso el origen y la referencia de la información. Las colectividades se pueden agrupar por las unidades que las componen, por sexos, por profesiones, por edades, formando sub-colectividades, pero si es de edades se debe precisar de qué edades se habla al hablar de niños, o de escolares, o de adulto.

Cuando en el siguiente Capítulo habla de la leyes estadísticas y de la regularidad de los actos humanos, no deja de recordar que la individualidad no

desaparece, porque el comportamiento del colectivo tenga unas reglas, que llegan a considerarse leyes estadísticas, pero estas regularidades, que son comentadas desde su origen de observación, Quetelet, y otros como Laplace, y a su vez los que ponían objeciones, como M.E. Rhenisch; - sean en referencia de falsarios, envenenadores, o de nacimientos, matrimonios - jamás sostienen que las cifras de regularidad no admitan variaciones, ni que afecten o distorsionen el comportamiento de la individualidad o singularidad, al tiempo que recalcan que las regularidades que se observan son más de referente a los porcentajes y a los grupos de edad, y/o de población de los que se puede considerar de comportamiento similar. *“La primer regla, es no buscar un término medio sino sobre objetos de una misma naturaleza, rara vez debemos satisfacernos con una simple analogía. Mientras sea posible, se debe de tratar de respetar las tres unidades, de objeto, de lugar y de tiempo.”*(pag. 85); y así en la practica indica referencias a precios de artículos en distinto lugar y tiempo, o su analogía y sentido del valor medio cuando se refieren al mismo cereal en un mismo mercado y un mismo tiempo, pero eso no quita que haya que hacer comparaciones de medias en el tiempo o en el espacio y ver o estudiar sus variaciones.

Todo el desarrollo de principios y sentido que aporta al debate, que recoge en el apartado 3º sobre las leyes estadísticas y la libertad moral, tiene no solo referencias a como se planteaba, sino también a que interpretaciones o justificaciones qué, permitían la mejora de la sociedad, o la simple obtención de los valores medios esperados como algo marcado natural que se descubría pero no se podía modificar. Citando a Laplace, Quetelet, G.St. Mill, M. Bodio, da distintas muestras de posición sobre la concepción de la libertad, su origen individual, y su relación social, dejando claro el efecto-origen que puede haber detrás, desde los principios de ética, de creencias, de causalidad hasta llegar a presentar las referencias del libro que se había escrito en la época como “Moral estadística” (en 1868), o “La moral estadística y el libre albedrío” (en 1867). Siendo este debate importante, hoy creo que superado, se termina dejando claro *“Jamás podrá la estadística poner de manifiesto más que actos patentes, hechos visibles, una realidad tangible”*(pag. 107), y aunque le dedica unas cuantas páginas, resalta al final que no es de la estadística moral de lo que se tiene que hablar; sino de los actos cometidos. Si no se cometiesen sin estar obligado, se negaría la libertad; el conocimiento de las circunstancias que los rodean es lo que podrá llevar a reducirlos, por causas susceptibles de ser modificadas; cuanto menor es el número de infracciones, mejor es el comportamiento, mas moralidad hay, y nadie debe buscar razones en el conocimiento estadístico, o en la información de la criminalidad, que proporcione argumentos contra la pena de muerte.

Sin duda hoy no se debaten estas cosas o principios, pero si se quiere insistir en que en la sociedad la estadística tiene mucha importancia, y sí hay que dejar claro ¿dónde está la labor de recogida y tratamiento de datos?, y ¿dónde empieza la distorsión de su uso?, como para que se llegue a escribir que las estadísticas sirven

muy bien para mentir, o son buenas si se sabe quien las hizo, con que ingredientes y como las preparó o cocinó.

## **El gran desarrollo: Información, Informática, Utilidad y Decisión**

Al tiempo que la estadística, se estancaba en lo que podía afectar a la organización y funcionamiento de la sociedad, se desarrollaba mucho mas rápidamente en el tratamiento de información y análisis de datos, en todo lo que no estaba sometido a criterios de opinión individual y/o social. Empieza a finales del XIX, y principios de este siglo que acabamos de dejar, la expansión de las múltiples aplicaciones para la comprobación de comportamientos o control de rendimientos, en donde algunos parámetros o variables resultaban cuasi inapreciables o inobservables y se consideraban como residuos o errores en la medición. El desarrollo de la formalización y demostración de propiedades, de comportamiento de variables, o de muestras/observaciones controladas en la propia aleatoriedad de su observación llevó a que adquiriese el desarrollo rápido y el valor que tiene como método de reconocido prestigio.

Son tantos los campos en que se aplica que hoy hay que plantear el problema y ver si procede un control de calidad, un contraste, una estimación de parámetros, una función de utilidad, y ver si nos movemos en terrenos de sanidad-salud, de física, de sociología, de cultura, de educación, o de cuentas y sus controles, es casi previo a cual puede ser el papel del estadístico en su resolución; el estadístico ayuda y supervisa que el estudio tenga calidad y rigor en su planteamiento pero difícilmente puede ser él solo el que plantee lo que entra en una especialidad que se le escapa (¿Se generan mas gases tóxicos cuando se quema A o B? – ¿en donde se miden sus toxicidades y como?, ¿en el aire que respiramos, o en los alimentos que las reabsorben y luego son nuestros nutrientes?)

Ni es el objetivo ni sabría en donde parar en referencia a sus múltiples aplicaciones, en agricultura, astronomía, medicina, sociología, empresa, economía, calidad, física, química, publicidad, artes, cibernética, historia; en muchas disciplinas de estudio existe la asignatura específica de la estadística, pero curiosamente poco se dice de cómo se recogen los datos, se clasifican, se diseñan cuestionarios. Y mucho mas de algunas tablas y formas de presentar, de relaciones entre variables, de los conceptos teóricos de aleatoriedad, y con las fórmulas, y a veces su incomoda comprensión, (para aquellos que precisamente escapaban del lenguaje matemático) solo cuando tienen algún problema práctico pueden entender y plantear lo que les resulta incómodo estudiar. Un conjunto amplio de sus aplicaciones, se puede ver en la publicación: *“La estadística-una guía de lo desconocido”*.

Puede resultar atractivo el indicar la publicación, “Métodos de análisis discriminante como herramienta al servicio de la Inspección fiscal” de Teófilo

Valdes, Monografía del IEF, que además de su consideración como aplicación singular de análisis estadístico, llevó a la mejora práctica de los sistemas informáticos y a la unívoca identificación de las unidades declarantes. Si el producto es directamente para la organización y eliminación de duplicidades en la identificación de declarantes, quizás no se viese tan fácil su lado práctico, que surge en la buena relación de las partes y el objetivo común de mejora de un servicio.

## **El objetivo final: Información, Informática, y organización de la Sociedad. La Estadística**

Si hemos partido de hacer un repaso del proceso histórico, no era tanto por lo que en ello pudiéramos aportar, sino por situarnos donde estamos y recordar que en sociedad y en juegos (intereses de varias partes con varias posibles soluciones), solo con conocimiento y colaboración se alcanzan mejoras no conflictivas y de valor para el conjunto de la sociedad. Las tensiones en que todos queremos lo mejor, y más, y más, no llevan a una solución de equilibrio adecuada. Lo dice la teoría y la práctica histórica, que sin la adecuada prudencia resulta ser demasiado conflictiva.

Los conflictos del siglo XX, han llevado a situaciones demasiado duras por el coste de su salida, desde la primera guerra mundial para el reconocimiento de derechos de trabajadores en una sociedad que ideológicamente cambiaba, y se industrializaba a un ritmo al que al trabajo no se le quería dar su parte, pasando por la gran depresión, -Keynes publicó primero su tratado de probabilidad (1920)- los desajustes financieros y de aplicación de recursos, la necesidad de orden y búsquedas de equilibrio social sigue siendo una forma de juego con aleatoriedad y riesgo permanente. Nuevos conflictos, con el desarrollo creciente de las tecnologías de información-cibernética, llevan a la creación de organismos internacionales, que buscan desde los sistemas de cuentas nacionales de R. Stone (SNA, o SEC, versión europea), junto con sistemas financieros y sus valores de intercambio internacional, hasta los organismos de Salud, o de Comercio, o de Agricultura-alimentación, todos llevan a concretar y precisar, o buscan mejorar, la información y las relaciones, como los de patentes y de control de calidad en los productos ISO's. etc.

España entró hace unos años en la vía de los privilegiados, y sabe internamente y externamente que la individualidad social, cultural, religión., principios, tiene que respetarse. Su Constitución, y su situación espacio temporal le puede permitir una consideración buena, ahora y en el futuro inmediato.

La Unión Europea (UE), no solo procede a buscar lo mejor para sus miembros, sino también a apoyar y colaborar en la búsqueda de la mejora del equilibrio internacional. En la organización se deja claramente como independiente, de la

decisión inmediata política: La Justicia, los órganos superiores que velan por el cumplimiento de las normas europeas; El sistema bancario o financiero, que desde el BCE, la cohesión y coordinación para una unidad única de intercambio; y las ayudas de prioridades en función de medidas; censos, precios, empleo, de situación de los Estados que se facilitan por los organismos especializados, EUROSTAT, para la normativa de integración y conceptos comparables en sus medidas. A ello se añaden otros organismos que pueden y deben emitir informes técnicos sobre, coordinación en aduanas, sobre la energía y en particular la nuclear, o sobre la privacidad y/o protección de datos individuales. Todo tiene una Política previa y no inmediata, en la consecución de la coordinación y la integración.

La comunicación entre los hombres permite eliminar barreras geográficas y temporales haciendo factible el intercambio de conocimientos y el progreso científico en todo momento. La estadística para la sociedad, forma parte de la ciencia que ayuda a su comprensión, desarrollo y mejora, pero no se puede olvidar que la pobreza no se compara solo en términos monetarios entre Mozambique, Galicia y Holanda; o entre Monterroso, Lalin y Santiago dentro de Galicia. Y ¿el bienestar o la felicidad es equivalente a la no pobreza?

Termino: para el desarrollo y mejor futuro, hay que defender con más energía el valor técnico-profesional de la Información Estadística, y su organización en la sociedad que en algunos casos está pendiente de cerrar como para la distribución de recursos públicos o financiación de las Comunidades Autónomas.

Concluyo: **“No habrá buenas estadísticas más que donde la voluntad política de los ciudadanos lo exija y los políticos lo asuman”**. Una comisión de expertos ha hecho un informe sobre situación y alternativas de mejora en las Estadísticas de España; su organización-coordinación-integración.

## Bibliografía

- ARISTÓTELES. (1988): *Política*. Trad. y notas de M. García Valdés; Ed. Gredos.
- BLOCK, M. (1888): *Tratado teórico-práctico de Estadística*. Unión Tipográfica Valencia.
- GONZÁLEZ URBANEJA, P. M. (2001): *Pitágoras el filósofo del número*. Ed. Nivola.
- HANSEN, M. H. y BAILAR, B. A. (1992): “Un método para contar mejor: aplicación de la estadística para mejorar la calidad de un censo”. En *La estadística-Una guía de lo desconocido-Traducción de la Soc. de Est. e Inv. Operativa de España*; Ed. Alianza.
- JASPERS, K. (1985): *Origen y meta de la Historia*. Alianza Universidad.
- LÉVY, M. (1975): *L'Información Statistique*. Ed. du Seuil.
- PLATÓN. (2006): *La República o el Estado*. Edición de M.Candel; Ed. Austral.

SAMPAIO, A. P. F. (1982): *Elementos de la Ciencia de la Estadística*. (Boix editor 1841), Facsímil INE.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. y VALDÉS CASTRO, C. (2001): *Los Bernoulli-Geómetras y viajeros*. Ed. Nivola.

- (2003): *Kolmogórov- El zar del azar*. Ed. Nivola.

SANZ SERRANO, A. (1956): *Resumen Histórico de la Estadística en España*. Madrid, INE

SCHUMACHER, E. F. (1978): *Lo pequeño es Hermoso-por una sociedad y una técnica a la medida del hombre*. Ed. H. Blume.

TODHUNTER, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability*. First edition, Cambridge. Reprint, Ed.Chelsea 1965.

WIENER, N. (1969): *Cibernética y Sociedad*.(1950); Reed. Ed.Sudamericana

## CAPÍTULO 8

# El análisis de fronteras estocásticas: Orígenes y primeros pasos

DAVID CASTILLA ESPINO  
Universidad de Huelva

JUAN JOSÉ GARCÍA DEL HOYO  
Universidad de Huelva

### Introducción

El Análisis de Fronteras Estocásticas (AFE) se gestó en la segunda mitad de la década de los 70 como técnica econométrica para la medición de la eficiencia y la productividad directamente influenciada por las versiones paramétricas de medición empírica de la eficiencia económica inspiradas en el trabajo pionero de Farrell (1957).

Esta técnica ha alcanzado un alto grado de popularidad en el ámbito científico, especialmente durante la última década en la que las aplicaciones en casi todas las áreas de la Economía y los desarrollos metodológicos de la técnica han sido prolijos.

El presente artículo tiene por objeto hacer una revisión de los orígenes y primeros pasos del AFE centrándose en la producción. Para la consecución de este objetivo, en un primer lugar se desarrollará el concepto de eficiencia económica y

su medición empírica desde una perspectiva histórica; en segundo lugar se referenciarán los trabajos que dan origen al AFE y se hará una breve reseña biográfica de sus precursores; en tercer lugar se presentarán los primeros pasos del AFE, en cuarto lugar se realizará un análisis del impacto del AFE en la literatura económica durante el período 1990-2008; en quinto lugar se presentarán las principales líneas de desarrollo del AFE en la actualidad; y finalmente se presentarán las conclusiones alcanzadas en esta revisión.

## **Eficiencia económica y antecedentes metodológicos del Análisis de Fronteras Estocásticas**

El concepto de eficiencia en la Economía fue considerado en sus inicios en el sentido asignativo refiriéndose a la mejor distribución de unos recursos escasos entre los individuos de la sociedad, aunque discrepando en relación con los medios y los objetivos según la corriente económica. De este modo, en el marco del liberalismo, Adam Smith propone la libre competencia (*laissez faire*) de la economía como instrumento que permite al hombre transformar los bienes privados en bienes públicos guiado por sus impulsos egoístas alcanzándose una asignación óptima (eficiente) de los recursos; mientras que a principios del siglo XX, la Teoría Económica del Bienestar, también conocida como Teoría de la Eficiencia Global, Teoría del Óptimo Social o Teoría de la Utilidad, incorpora en la *Ciencia Económica* el objetivo desarrollado en la *Teoría del Contrato Social* de maximizar el bienestar social e introduce en relación con este objetivo el concepto de Eficiencia de Pareto, según el cual una asignación es eficiente cuando para un conjunto dado de gustos del consumidor, recursos y tecnología no es posible alcanzar otra asignación en la que se incremente la utilidad (satisfacción) de algunas personas sin reducir la de otras.

Por otra parte, la Teoría de los Derechos de Propiedad, establece que las condiciones del Teorema de Pareto suponen implícitamente que el sistema de derechos de propiedad de la sociedad se encuentra perfectamente definido y que, por lo tanto, no existen costes de transacción asociados a los intercambios, siendo de aplicación el Teorema de Coase, según el cual en ausencia de costes de transacción e independientemente de quienes tengan otorgados los derechos de propiedad, una economía de mercado libre alcanza la asignación eficiente de los recursos.

No obstante, Las condiciones de eficiencia del Teorema de Coase no se cumplen generalmente debido a que los derechos de propiedad de la sociedad no se encuentran apropiadamente definidos, especialmente en el caso de los recursos naturales, cuyos mercados se caracterizan por estar minados de costes de transacción dando lugar a externalidades de naturaleza técnica en los términos de Bator (1958) de tal modo que no resulta de aplicación el Teorema de Coase dando

lugar a distintos grados de ineficiencia de la economía en su conjunto.

Más recientemente, durante la segunda mitad del siglo XX, Leibenstein (1966) desarrolló la Teoría de la Eficiencia X en el marco de la Teoría Económica del Comportamiento. Este autor adopta un enfoque más microeconómico y observa que *la evidencia empírica, ..., sugiere que la mejora del bienestar que se puede alcanzar mejorando exclusivamente la eficiencia asignativa es por lo general excesivamente reducida, ...* (Leibenstein, 1966: 394). Estas causas desconocidas que contribuyen a la persistencia de la ineficiencia constituyen lo que de acuerdo con esta teoría se ha denominado eficiencia X que puede ser explicada mediante seis postulados básicos: los mercados son imperfectos, los contratos de trabajo y la función de producción son incompletos, los trabajadores hacen un uso discrecional de su esfuerzo, los individuos no son siempre totalmente racionales y la existencia de áreas inertes (Frantz, 2004).

Siguiendo una perspectiva puramente microeconómica una de las primeras definiciones formales de la eficiencia técnica fue proporcionada por Tjalling C. Koopmans laureado con el Nobel de Economía en 1975 de acuerdo con la cual un determinado output es técnicamente eficiente cuando un incremento del mismo sólo puede ser alcanzado reduciendo la cantidad producida de otro output (Koopmans, 1951).

Farrell (1957) desarrolló el concepto de eficiencia tal y como se conoce actualmente y sentó las bases para su medición junto con Debreu (1951). Según Farrell, la eficiencia económica o eficiencia total se compone de eficiencia técnica, que representa la habilidad de una unidad de decisión para producir más, dados unos niveles determinados de inputs, y la eficiencia asignativa que representa la habilidad de una unidad de decisión de producir lo mismo usando proporciones óptimas de inputs bajo un supuesto optimizador<sup>1</sup>.

El concepto de eficiencia económica desarrollado en Farrell (1957) constituye, como ya se ha señalado, el punto de partida para el desarrollo posterior de las técnicas destinadas a la medición de la eficiencia que han dado lugar a dos ramificaciones metodológicas que han evolucionado paralelamente hasta la actualidad: Las técnicas paramétricas (Aigner, *et al.* 1977; Meeusen y Van den Broeck, 1977) y no paramétricas del Análisis Envoltante de Datos (Charnes, *et al.* 1978) de medición de la eficiencia y la productividad.

Los primeros intentos para desarrollar una técnica paramétrica para medir la eficiencia técnica utilizando datos de corte transversal se fundamentaron en restricciones sobre el término de error del modelo econométrico clásico que imponían que su signo fuera positivo. De este modo las desviaciones que se producían con respecto al nivel de producción de frontera eran explicadas únicamente por la ineficiencia técnica de la unidad productiva.

---

<sup>1</sup> Farrell (1957) denotó a la eficiencia asignativa con el término eficiencia en precios.

Las técnicas deterministas paramétricas de estimación de la eficiencia técnica utilizan, en el caso de datos de corte transversal, procedimientos de estimación bietápicas en los que, en una primera etapa, se procede a la estimación del modelo econométrico de producción clásico utilizando una forma funcional lineal o linealizable (v.g. Coob-Douglas o Translog) por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) y en una segunda etapa se corrige el término de error imponiéndose la restricción de que tome sólo valores de signo positivo.

De estas técnicas deterministas paramétricas son destacables la técnica de Mínimos Cuadrados Ordinarios Corregidos (MCOC) propuesto por Winsten (1957) y difundido por Gabrielsen (1975); y la de Mínimos Cuadrados Ordinarios Modificados (MCOM) propuesto por Afrait (1972) y Richmond (1974). Estos dos procedimientos de estimación se diferencian en la segunda de las etapas de estimación de las técnicas deterministas paramétricas.

Schmidt (1976) desarrolló un procedimiento de estimación máximo-verosímil de la frontera determinista basándose en el supuesto de que el término de error del modelo se distribuyera según una función de densidad de probabilidad exponencial o media-normal inspirado por los métodos basados en programación lineal y cuadrática propuestos por Aigner y Chu (1968) y Timmer (1971) con posterioridad al desarrollo de las técnicas de estimación deterministas; no obstante, tal y como este mismo autor señaló, no es posible conocer las propiedades asintóticas de los estimadores obtenidos por este procedimiento dado que no cumplen las propiedades deseables para los procedimientos de estimación máximo-verosímil<sup>2</sup>.

## Origen del Análisis de Fronteras Estocásticas

Las técnicas paramétricas deterministas de estimación de la frontera de producción y de la eficiencia técnica tienen el inconveniente de que suponen que la totalidad de la desviación entre el output efectivo con respecto al output máximo potencial situado en la frontera de producción estimada de la unidad productiva se debe, en exclusiva, a las ineficiencias de la unidad productiva.

La ausencia de la influencia de la aleatoriedad en este tipo de modelos, no se corresponde con la realidad económica, en la que es común que se produzcan alteraciones de la producción debidas a shocks aleatorios incontrolables. Este hecho es la norma en la actividad pesquera cuyo rasgo más característico es su naturaleza estocástica. Además, la especificación determinista de la frontera de

---

<sup>2</sup> Este problema fue solucionado por Greene (1980a) suponiendo que el término de error se distribuía según una Gamma, con el inconveniente de que este modelo no tiene como contrapartida ningún problema de programación por metas conocido a diferencia de lo que ocurría con los supuestos de que se distribuía como exponencial (problema de programación lineal) o media-normal (problema de programación cuadrática).

producción, no explica niveles de producción situados por encima de la misma que se dan a la hora de abordar la realidad con estos modelos. La solución de este inconveniente requiere la estimación de una función de producción con un término de error compuesto que considere tanto las fluctuaciones aleatorias de la producción como el efecto de la ineficiencia técnica.

Los trabajos teóricos que iniciaron desde ambas orillas del Atlántico el AFE corresponden a Meeusen y Van den Broek (1977 - MB) directamente inspirado por Afrait (1972) y Richmond (1974); y Aigner, Lovell & Schmidt (1977 - ALS) que combinaron elegantemente las propuestas realizadas en Schmidt (1976) y Aigner, *et al.* (1976). Estos dos artículos fueron publicados con un mes de diferencia tras un largo proceso de revisión y la primera aplicación posterior corresponde a Battese & Corra (1977), cuyo primer autor fue revisor del segundo de los artículos (Kumbhakar & Lovell, 2000).

Estos dos artículos desarrollaron el concepto de frontera estocástica de producción caracterizada por un término de error compuesto de dos errores: uno distribuido conforme a una distribución Normal representativo de los shocks aleatorios, y otro de una sola cola representativo de la ineficiencia y distribuido conforme a una distribución Semínormal o Exponencial. Estos autores propusieron la estimación de la frontera de producción por el método de máxima verosimilitud proponiendo una tecnología de producción Cobb-Douglas y un método para la determinación de la eficiencia media de un sector industrial.

En relación con los autores del primero de los dos artículos que dan origen al AFE, Win Meeusen y Julien van den Broeck son los dos profesores de Macroeconomía, y de Principios de Economía y Sistemas Económicos respectivamente de la universidad belga de Antwerpen. El primero de los autores tiene como línea de investigación principal la economía de la innovación y la tecnología, así como la competitividad internacional; mientras que el segundo el AFE y los paradigmas económicos. Ambos autores recibieron un total de 3428 citas en revistas de impactos de primera y segunda generación por su artículo pionero en *International Economic Review* con el que iniciaron el AFE. El segundo de los autores ha centrado su actividad investigación en el AFE más que el segundo realizando una contribución importante en relación con los procedimientos de estimación bayesiana del AFE (Van den Broeck, *et al.* 1994).

En relación con los autores del segundo de los artículos, Dennis Aigner, CA Knox Lovell y Peter Schmidt son Catedráticos de Economía de las Universidades de California en Santa Bárbara, de Georgia y del estado de Michigan. Salvo el primero de los autores que centra sus investigaciones en competitividad global principalmente en el sector eléctrico, los otros dos ha continuado contribuyendo al desarrollo metodológico del AFE destacando su participación posterior en la elaboración del procedimiento de estimación de puntuaciones individuales de ineficiencia (Jondrow, *et al.* 1982) o de la creación de una de las revisiones más

extensas y pedagógicas del AFE (Kumbhakar y Lovell, 2000).

Peter Schmidt destaca entre todos los autores considerados por su contribución no sólo en el desarrollo del AFE sino también a la Econometría en general. Este autor aparece listado en la base de datos *ISI Highly Cited* elaborada por Thomson ISI © 2008 con un total de 138 artículos de impacto hasta julio de 2003. El primero de sus artículos dedicado a las fronteras de producción ha recibido un total de 1199 citas en revistas de impacto de primera y segunda generación (Schmidt, 1976) y se encuentra en el percentil 5 del ranking de autores listados en REPEC.

## Primeros pasos del Análisis de Fronteras Estocásticas

Una frontera de producción estocástica puede definirse formalmente como se presenta en la Ecuación 1, donde se asume una tecnología de la producción en la que un único output  $Y$  es producido por  $N$  unidades productivas y  $K$  inputs  $X$ . En la expresión contenida en la Ecuación 1,  $Y$  es un vector  $N \times 1$  de outputs de producción de cada una de las  $N$  unidades productivas,  $X$  es el vector  $N \times (K+1)$  de los  $K$  inputs productivos de cada una de las  $N$  unidades productivas con unos en la primera columna,  $\beta$  el vector  $(K+1) \times 1$  de parámetros de la frontera de producción,  $V$  un vector  $[e^{-v_i}]_{N \times 1}$  de residuos que representa el efecto de los shocks aleatorios sobre la producción, donde  $v_i$  puede tomar cualquier valor real y  $ET$  un vector  $[e^{-u_i}]_{N \times 1}$  de eficiencias técnicas de cada una de las  $N$  unidades de producción donde  $u_i$  es la ineficiencia técnica que toma valores mayores o iguales a 0; y cada unidad productiva es identificada por el subíndice  $i$ .

$$Y = f(X; \beta) \cdot V \cdot ET \quad (1)$$

El modelo presentado en la Ecuación 1 tiene un error compuesto de un error de dos colas ( $v_i$ ) representativo de los shocks aleatorios que desvían a la empresa de su output máximo potencial y un término de error de una sola cola ( $u_i$ ) representativo de las ineficiencias de la empresa que hacen que su output esté situado por debajo del que potencialmente es capaz de alcanzar.

El procedimiento de estimación de los modelos de fronteras estocásticas para datos de corte transversal más generalizado es el de estimación Máximo Verosímil (MV) propuesto por ALS y MB que exige fuertes supuestos distribucionales<sup>3</sup>.

El AFE no posibilita hasta principios de los 80 la posibilidad de proporcionar medidas de la eficiencia de unidades productivas individualmente consideradas para el procedimiento de estimación de MV. Esta limitación fue superada por Jondrow, *et al.* (1982 - JLMS) que proponen la estimación de la eficiencia técnica

<sup>3</sup> Para detalles sobre la estimación de este tipo de modelos de error compuesto por el método de los momentos véase Greene (1993, 1997), Harris (1992) y Olson *et al.* (1980).

basándose en el cálculo de la media o la moda de la distribución condicional del término de error que representa la ineficiencia técnica condicionada al error compuesto de cada unidad productiva  $i$  de tal modo que  $ET$  es calculada de acuerdo con la expresión contenida en la Ecuación 2. Posteriormente Battese y Coelli, (1988 - BC) propone que se utilice directamente la esperanza matemática de  $ET$ .

$$ET = e^{-\hat{u}_i} \quad (2)$$

El uso de datos de panel permite resolver problemas no superados en el caso de modelos de corte transversal, tales como la estimación del cambio técnico o la consideración de eficiencia técnica variante en el tiempo, además de estar dotados de una mayor flexibilidad permitiendo una relajación de los fuertes supuestos distribucionales requeridos para la estimación de fronteras estocásticas en el caso de datos de corte transversal (Schmidt y Sickles, 1984).

El desarrollo de los modelos de panel en el AFE desde principios de los 80 siguió en líneas generales dos caminos claramente diferenciados. Por un lado, los trabajos de Pitt y Lee (1981), Schmidt y Sickles (1984) y Battese y Coelli (1988) que realizaron las adaptaciones necesarias de los métodos clásicos de datos de panel para estimar la eficiencia técnica de las unidades productivas bajo el supuesto de eficiencia técnica invariante en el tiempo.

Por otro lado, el segundo camino iniciado algo más tarde que el anterior por Conrwell *et al.* (1990), Lee y Schmidt (1993), Khumbakar (1990) y Battese y Coelli (1992) permitió la posibilidad de que la eficiencia técnica de cada una de las unidades productivas variara en el tiempo según distintos patrones, hecho que resulta bastante probable cuando el número de períodos considerados es lo suficientemente largo.

En lo que se refiere a los modelos de eficiencia técnica invariante en el tiempo, un modelo general puede ser representado en los términos de la Ecuación 3 donde  $Y_{it}$  es el output del proceso de producción,  $X_{it}$  son los inputs utilizados en el proceso productivo,  $\beta$  son los vectores de parámetros de la tecnología de la producción,  $v_{it}$  es un término de error normalmente distribuido con media 0 y varianza  $\sigma_v^2$  e independiente de los regresores que refleja los efectos de los shocks aleatorios sobre la producción y  $u_i$  representa la ineficiencia de cada unidad productiva  $i$  de la que no se tiene por qué realizar ningún supuesto distribucional o de independencia con respecto a los regresores, asumiéndose exclusivamente que permanece invariante en el tiempo.

$$Y_{it} = f(X_{it}; \beta) + v_{it} - u_i \quad (3)$$

Destacan cuatro técnicas diferentes de estimación del modelo presentado en la Ecuación 3: la técnica de efectos fijos o modelo de mínimos cuadrados con variables ficticias (MCFV), la técnica de efectos aleatorios estimado por mínimos cuadrados generalizados (MCG), el modelo de Hausman-Taylor para casos en los

que la eficiencia técnica no está correlacionada con algunos regresores y con otros sí (HT) y los modelos de fronteras estocásticas estimadas por MV.

La elección de cualquiera de estos modelos depende de si existe o no independencia entre la eficiencia técnica y los regresores del modelo y de las características asintóticas de los estimadores propuestos en cada uno de los modelos cuando el número de observaciones y / o el número de períodos de tiempo tiende a infinito (Khumbakar y Lovell, 2000).

En lo referente a los modelos de fronteras estocásticas para datos de panel con eficiencia variante en el tiempo han sido propuestas en la literatura distintas especificaciones para posibilitar la variabilidad de la eficiencia, la cual implica la inclusión del subíndice  $t$  en el componente de error de una sola cola presentado en la Ecuación 3.

Se han desarrollado en términos generales los siguientes métodos de estimación: el modelo de efectos fijos, el modelo de efectos aleatorios con patrón de variación de la eficiencia diferente para cada empresa y común para todas las empresas en cada momento del tiempo; y los modelos estimados por máxima verosimilitud con patrón de variación común para todas las empresas o diferente para cada una de ellas.

En cuanto a la elección del modelo más adecuado nos remitimos a Cuesta (2001: 72-76) donde se analizan con detalle los criterios que nos permiten la elección de cada uno de ellos fundamentándose en las características de los fenómenos estudiados, los supuestos sobre independencia de las ineficiencias con respecto a los regresores y la consistencia y eficiencia asintótica.

## **Impacto científico**

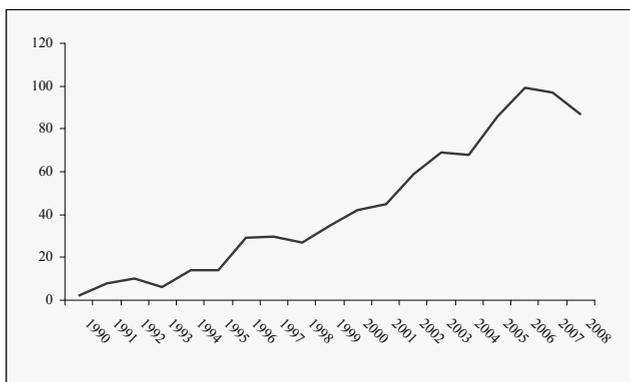
A los efectos de medir el desarrollo que el AFE ha tenido en la literatura científica económica se ha realizado una búsqueda en ECONLIT de todas las publicaciones realizadas en las que aparecido la combinación de palabras *Stochastic Frontier* en el resumen de los artículos referenciados en esta base de datos durante el período 1990-2008.

Los resultados de este barrido bibliográfico que en ningún caso es exhaustiva constituyen una aproximación de la evolución que ha tenido la aplicación y el desarrollo teórico del AFE que sin duda ha sido objeto de un mayor tratamiento en la literatura científica que el presentado en esta sección en revistas de reconocido prestigio internacional.

El barrido bibliográfico descrito en los párrafos anteriores arroja un total de 827 publicaciones en revistas económicas realizadas durante los 19 años considerados y permite concluir una evolución creciente del número de publicaciones que

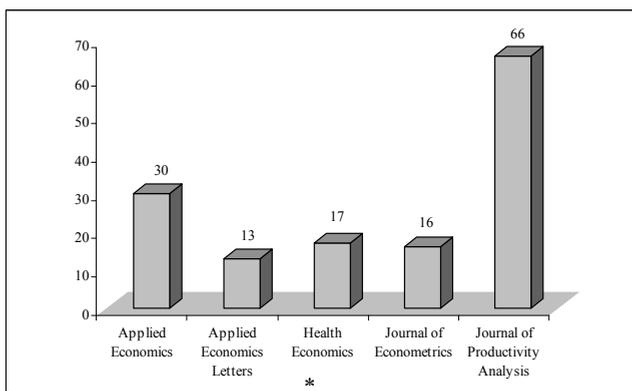
comienzan a ser significativamente grandes durante la última década hasta situarse en un número de publicaciones que ronda las 90 al final del período (Figura 2).

**Figura 2.** Evolución de las publicaciones contenidas en el barrido bibliográfico de la combinación de palabras *Stochastic Frontier* en Econlit (1990-2008).



En lo que respecta a las revistas que publican artículos científicos de las características descritas en esta sección es destacable que las publicaciones han sido realizadas en un total de 312 revistas diferentes lo que constituye un síntoma de la versatilidad y aplicabilidad de esta técnica a una amplia variedad de disciplinas económicas entre las que destacan el sector financiero, el sanitario y el agrícola.

**Figura 3.** Revistas más destacadas del AFE (1990-2008).



\* Empatada con Journal of Banking and Finance

La Figura 3 muestra las 5 revistas que han publicado más artículos sobre esta materia, entre las que destaca *Journal of Productivity Analysis* especialmente gestada para dar cabida a una amplia variedad de aplicaciones y desarrollos metodológicos de técnicas paramétricas, entre las que se incluye el AFE, y no paramétricas del Análisis de la Eficiencia y la Productividad. Es destacable que

todas las revistas recogidas en la Figura 3 aparecen referenciadas con diferentes índices de impacto en las distintas bases de datos de *ISI Web of Knowledge*.

## Últimas aportaciones

Numerosos estudios han revisado el desarrollo del AFE desde sus inicios en diferentes momentos del tiempo. Algunos de estos han sido orientados a un determinado tipo de aplicaciones tales como Battese (1992) que realizó una revisión de aplicaciones en el sector agrícola o Lovell (1995) que realizó una revisión de aplicaciones en el ámbito de las políticas públicas, mientras que otros se enfocan en los desarrollos metodológicos tales como Bauer (1990), Greene (1993, 1997, 2008), Kumbhakar y Lovell (2000), Murillo-Zamorano (2004) o Amsler, *et al.* 2009. Entre estos últimos, los más recientes desarrollan de manera sucinta los principales desarrollos que el análisis de fronteras estocásticas.

Además de algunas alternativas paramétricas a los modelos desarrolladas durante la década de los 80 y principios de los 90, destaca el desarrollo de modelos durante la última década en los que se relajan o eliminan los restrictivos supuestos asociados a los modelos de fronteras estocásticas.

Los primeros, denominados semiparamétricos, relajan los supuestos asociados a la tecnología de producción generalmente asumida Cobb-Douglas o Translogarítmica transcendental en la línea de Fan, *et al.* (1996), o las distribuciones de los términos del error compuesto tales como Park y Simar (1994), Sickles (2005) o Tsionas y Greene (2003). Estos últimos dan origen en los últimos años a un extenso grupo de modelos denominados de clase latente (Orea y Kumbhakar, 2004). Los segundos, denominados no paramétricos, y sugeridos por Kumbhakar, *et al.* (2005) evitan problemas de especificación de la tecnología o formas de heterocedasticidad desconocidas entre otras ventajas (Greene, 2008).

Los procedimientos de estimación bayesiana de fronteras estocásticas que vienen siendo desarrolladas desde mediados de la década de los 90 se han sumado a los relacionados en la sección 2 (Koop, *et al.* 1994, 1997, 1997). Estos han experimentado una expansión considerable durante los últimos años y permiten superar las dificultades derivadas de la maximización de las funciones de verosimilitud debido al uso de cadenas de Montecarlo de Markov, aunque la elección de las distribuciones a priori es problemático, aunque como se señala en Amsler, *et al.* (2009) cuando la muestra es lo suficientemente grande las distribuciones a priori tienden a ser dominantes visiblemente. Por otra parte algunos desarrollos recientes han permitido el desarrollo de modelos de eficiencia dinámica que profundizan en aspectos como la persistencia en la ineficiencia de las unidades productivas (Tsionas, 2003).

Recientemente se han realizado numerosos avances en relación con una de las

limitaciones históricas de las fronteras estocásticas de producción: el modelado de tecnologías multi-producto. Además de la posibilidad de agregar los outputs utilizando precios, la construcción de índices superlativos o el empeño de la teoría dual de la producción: la utilización de funciones de distancias (Coelli y Perelman, 1996, 1999, 2000). Estas constituyen una alternativa elegante que, aunque no exenta de limitaciones en relación con el sesgo de las estimaciones o las restricciones de monotonicidad y curvatura (Cuesta y Orea, 2002; Perelman y Santin, 2008).

Finalmente, la consideración de los modelos de fronteras estocásticas de la heterogeneidad observable, esto es, la apreciable en las variables disponibles; y la inobservable, que a modo de efectos no presentes en las variables disponibles están relacionados con variables no observadas, ha dado lugar a distintas líneas de desarrollo en la literatura científica del AFE (Greene, 2008). Entre estos desarrollos destacan los ya mencionados modelos de clase latente gestados para la consideración de la heterogeneidad inobservable.

## Conclusiones

El concepto de eficiencia ha sido históricamente considerado desde una perspectiva asignativa o de distribución óptima de los recursos escasos de una economía, y hasta la segunda mitad del siglo XX no es abordado significativamente desde una perspectiva microeconómica cuando es descompuesto formalmente en eficiencia asignativa y técnica, y Debreu (1951) y Farrell (1957) sientan las bases para su medición empírica.

El AFE nace con la pretensión de incorporar en la especificación de la frontera de producción de un conjunto de unidades productivas de la posibilidad de que estas puedan situarse por encima o por debajo de la misma como consecuencia del impacto que factores de naturaleza estocásticas tienen en la producción. Sus precursores europeos y estadounidenses cosecharon un importante impacto en la literatura científica y contribuyeron significativamente con posterioridad al desarrollo de esta metodología destacando por sus contribuciones Peter Schmidt, CA Knox Lovell y Julien van den Broeck.

El AFE ha sido objeto de numerosas aplicaciones y desarrollos metodológicos durante las últimas dos décadas como puede ser constatado por el creciente número de publicaciones en la literatura científica económica destacando, entre sus aplicaciones las del sector financiero, sanitario y agrario.

El AFE es una técnica todavía en desarrollo desde el punto de vista metodológico, prueba de ello es las distintas líneas actuales de esta metodología que profundizan en versiones paramétricas, semiparamétricas y no paramétricas alternativas o la solución de problemas históricos como la aplicación a tecnologías

multioput; que incorporan el procedimiento de estimación bayesiano; y que abordan la problemática asociada a la heterogeneidad observable e inobservable.

## Bibliografía

- AFRAIT, S. N. (1972): "Efficiency Estimation of Production Functions". *International Economic Review*, 13(3): 568-98.
- AIGNER, D. y CHU, S. F. (1968): "On Estimating the Industry Production Function". *American Economic Review*, 58: 826-39.
- AIGNER, D. T., AMEMIYA y POIRIER, D. J. (1976): "On the Estimation of Production Frontiers". *International Economic Review*, 77: 377-96.
- AIGNER, D. J., LOVELL, C.A.K. y SCHMIDT, P. (1977): "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models". *Journal of Econometrics*, 6 (1): 21-37.
- AMSLER, C., LEE, Y. H. y SCHMIDT, P. (2009): "A Survey of Stochastic Frontier Models and Likely Future Developments". *Seoul Journal of Economics*, 22(1): 5-27.
- ARIAS SAMPEDRO, C. (2001): "La Estimación de Eficiencia en Modelos con Datos de Panel". En A. Álvarez (Coord.): *La Medición de la Eficiencia y la Productividad*, Madrid: Pirámide.
- BATTESE G. E. (1992): "Frontier production functions and technical efficiency: a survey of empirical applications in agricultural economics". *Agricultural Economics*, 7(3-4): 185-208.
- BATTESE, G. E. y COELLI, T. J. (1988): "Prediction of Firm-Level Technical efficiencies with a Generalized Frontier Production function and Panel Data". *Journal of Econometrics*, 38: 387-99.
- (1992): "Frontier Production Functions, Technical Efficiency and Panel Data: With Application to Paddy Farmers in India". *Journal of Productivity Analysis*, 3: 153-69.
- BATTESE, G. E. y CORRA, G. S. (1977): "Estimation of a Production Frontier Model: With Application to the Pastoral Zone of Eastern Australia". *Australian Journal of Agricultural Economics*, 21: 169-79.
- BATOR, F. M. (1958): "The Anatomy of Market Failure". *Quarterly Journal of Economics*, 72: 351-79.
- CHARNES, A., COOPER, W. W. y RHODES E. (1978): "Measuring of Efficiency on Decision Making Units". *European Journal of Operational Research*, 2(6): 429-44.
- COELLI, T. J y PERELMAN, S. (1996). *Efficiency Measurement, Multiple-output Technologies and Distance Functions: With Application to European Railways*. CREPP Discussion Paper no. 96/05. University of Liege, Liege, Bélgica.
- (1999). "Comparison of Parametric and Non-Parametric distance functions: with application to European Railways". *European Journal of Operational Research*, 117:

326-39.

- (2000). "Technical Efficiency of European Railways: A Distance function Approach". *Applied Economics*, 32: 1967-76.
- CORNWELL, C., SCHMIDT, P. y SICKLES, R.C. (1990): "Productions Frontiers with cross-Sectional and Time-Series Variation in Efficiency Levels". *Journal of Econometrics*, 46: 185-200.
- CUESTA, R. (2001): "Modelos con Eficiencia Técnica Variante en el Tiempo". En A. Álvarez (Coord.): *La Medición de la Eficiencia y la Productividad*, Madrid: Pirámide.
- DEBREU, G. (1951): "The Coeficient of Resource Utilization". *Econometrica*, 19(3): 273-92.
- FAN, Y., LI, Q. y WEERSINK, A. (1996): "Semiparametric Estimation of Stochastic Production Frontiers". *Journal of Business and Economic Statistics*, 64: 865-90.
- FRANTZ, R. (2004): "The Behavioral Economics of George Akerloff and Harvey Leibenstein". *Journal of Socio-Economics*, 33: 29-44.
- FARRELL, M. J. (1957): "The Measurement of Productive Efficiency". *Journal of the Royal Statistical Society*, 120(3): 253-90.
- GABRIELSEN, A. (1975): "On Estimating Efficient Production Functions", *Working Paper n° A-35*, Chr. Michelsen Institute, Departamento de Humanidades y Ciencias Sociales, Bergen, Noruega.
- GREENE, W. H. (1980a): "Maximum-Likelihood Estimation of Econometric Frontier Functions". *Journal of Econometrics*, 13(1): 27-56.
- (1980b): "On the Estimation of a Flexible Frontier Production Function". *Journal of Econometrics*, 13(1): 101-15.
- (1990): "A Gamma Distributed Stochastic Frontier Model". *Journal of Econometrics*, 46(1/2): 141-64.
- (1993): "The Econometric Approach to Efficiency Analysis". En H.O. Fried, C.A.K. Lovell y S.S. Schmidt (eds.): *The Measurement of Productive Efficiency*, Nueva York: Oxford University Press.
- (1997): "Frontier Production Functions". En M.H. Pesaran y P. Schmidt (eds.): *Handbook of Applied Econometrics, Volume II: Microeconomics*, Oxford: Blackwell Publisher, Ltd.
- (2008): "The Econometric Approach to Efficiency Analysis". En H.O. Fried, C.A.K. Lovell y S.S. Schmidt (eds.): *The measurement of productive efficiency and productivity growth*, Nueva York: Oxford University Press.
- HARRIS, C. M. (1992): "Technical Efficiency in Australia: Phase I". En R.E. Caves (ed.): *Industrial Efficiency in Six Nations*, Cambridge M.A.: MIT Press.
- HAUSMAN, J. A. (1978): "Specification Tests in Econometrics". *Econometrica*, 46: 1251-72.
- HAUSMAN, J. A. y TAYLOR, E. E. (1981): "Panel Data and Unobservable Individual

- Effects". *Econometrica*, 49: 1377-98.
- JONDROW, J., LOVELL, C. A. K., MATEROV, I. S. y SCHMIDT, P. (1982): "On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model". *Journal of Econometrics*, 19: 233-38.
- KHUMBAKAR, S. C. (1990): "Production Frontier, Panel Data and Time-varying Technical Inefficiency". *Journal of Econometrics*, 46: 201-11.
- KHUMBAKAR, S. C. y LOVELL, C. A. K. (2000): *Stochastic Frontier Analysis*. Cambridge University Press, Nueva York (EE.UU. de America).
- KOOPMANS, T. C. (1951): "An analysis of production as an efficient combination of activities". En: Koopmans, T.C. (Ed.): *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph, 13, Nueva York: JWS.
- LEE, Y. H. y SCHMIDT, P. (1993): "A Production Frontier Model with Flexible Temporal Variation in Technical Efficiency". En H. Fried, C.A.K. Lovell y S Schmidt (eds.): *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Nueva York: Oxford University Press.
- LEIBENSTEIN, H. (1966): "Allocative efficiency vs. 'X-efficiency'". *American Economic Review*, 56: 392-415.
- LOVELL, C. A. K. (1993): "Production Frontiers and Productive Efficiency". En H. Fried, C.A.K. Lovell y S Schmidt (eds.): *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Nueva York: Oxford University Press.
- (1995): "Econometric efficiency analysis: A policy-oriented review". *European Journal of Operational Research*, 80(3): 452-61.
- MEUSEN, W. y VAN DEN BROECK, J. (1977): "Efficiency estimation from Cobb-Douglas Production functions with composed error". *International Economic Review*, 18 (2): 435-44.
- MURILLO-ZAMORANO, L. y VEGA-CERVERA, R. (2001): "The Use of Parametric and Nonparametric Frontier Methods to Measure the Productive Efficiency in the Industrial Sector: A Comparative Study". *International Journal of Production Economics*, 69: 265-75.
- OLSON, J. A., SCHMIDT, P. y WALDMAN, D. M. (1980): "A Montecarlo Study of Estimators of Stochastic Frontier Production Functions". *Journal of Econometrics*, 13(1): 67-82.
- PERELMAN, S. y SANTÍN, D. (2008): "Imposing Weak Monotonicity on Parametric Distance Function Estimations". Economic Discussion Paper, *Efficiency Series Paper*, 02/2008, Departamento de Economía, Universidad de Oviedo.
- PITT, M. y LEE, L. F. (1981): "The Measurement and Sources of Technical Inefficiency in the Indonesian Weaving Industry". *Journal of Development Economics*, 9: 43-64.
- RICHMOND, J. (1974): "Estimating the Efficiency of Production". *International Economic Review*, 15(2): 515-21.
- SEITZ, W. D. (1971): "Efficiency Measures for Steam-Electric Generating Plants". *Journal*

*of Political Economy*, 79(4): 878-96.

SCHMIDT, P. y SICKLES, R. C. (1984): "Production Frontiers and Panel Data". *Journal of Business and Economic Statistics*, 4: 367-74.

STEVENSON, R. E. (1980): "Likelihood Function of Generalized Stochastic Frontier Estimation". *Journal of Econometrics*, 13(1): 57-66.

TSIONAS, E. (2003): *Inference in Dynamic Stochastic Frontier Models*. Working Paper, Department of Economics, Athens University of Economics and Business, Athens.

WINSTEN, C. B. (1957): "Discussion on Mr. Farrell's Paper". *Journal of the Royal Statistical Society, Series A, General*, 120(3): 282-84.



## CAPÍTULO 9

# En Homenaje al Profesor Sixto Ríos García

**M<sup>a</sup> DEL CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS**  
Universidad CEU San Pablo

**ANA I. BUSTO CABALLERO**  
Universidad Complutense

### Resumen

Sixto Ríos García ha sido considerado en todo el mundo científico como el padre español de la Investigación Operativa desde finales del siglo XX. Sus contribuciones a la Estadística son conocidas en todo el horizonte científico y su trabajo también ha merecido un reconocimiento de calidad tanto en España como en la comunidad internacional.

Su vida ha sido un referente en la formación de investigadores y en la creación de centros de investigación estadística como la primera Escuela de Estadística de España, el Instituto de Estadística y el de Investigación Operativa del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC).

Ha escrito más de treinta libros y más de doscientos artículos que han sido publicados en distintas revistas científicas internacionales. Sus alumnos son actualmente directores de departamentos universitarios tanto en España como en el extranjero.

Durante toda su vida ha ido recogiendo premios y honores a su labor, como su nombramiento en 1959 como Académico de la Real Academia de Ciencias

Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, el Premio Francisco Franco otorgado por el CSIC en 1975, y el premio nacional de Investigación Matemática concedido por SM el Rey Juan Carlos I en 1977. En Inglaterra la Royal Society le designó Honorary Fellow en 1978.

Su muerte acaecida el 8 de Julio del año pasado ha sido la propulsora de este pequeño homenaje para inscribir con letras mayúsculas su vida y obra en la historia científica de España.

## Introducción

Este trabajo pretende ser un pequeño homenaje a la figura de Sixto Ríos García, personaje excepcional que debe recordarse, no sólo por su importante labor investigadora en Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa, sino también por su labor docente, atestiguada por un gran número de matemáticos españoles actuales que se sienten sus discípulos y componentes de su escuela.

Además de ser investigador y maestro, el profesor Sixto Ríos ha ido un poco más allá. Ha dedicado su vida a fomentar el estudio de la Estadística en todos los ámbitos y campos de la ciencia, creando centros de investigación nacionales e internacionales para la formación de profesionales expertos.

A handwritten signature in black ink that reads "Sixto Ríos". The signature is written in a cursive style and is enclosed within a large, hand-drawn oval.

La firma de Sixto Ríos siempre ha sido sinónimo de investigación, calidad, tesón y enseñanza

## Pinceladas biográficas

Sixto Ríos García es hijo de los maestros de primera enseñanza D. José María Ríos Moreiro y Dña. M<sup>a</sup> Cristina García Martín, que ejercen su profesión en Pelahustán (Toledo), donde el 4 de enero de 1913, nace su primer hijo Sixto. A los tres años su familia se traslada a otro pueblo un poco más grande, Los Navalmorales, donde Sixto comienza a ir al colegio con su padre y donde nace su única hermana M<sup>a</sup> Encarnación. A los seis años, la familia de Sixto vuelve a trasladarse, esta vez a Madrid, por motivos de trabajo de sus padres. Sixto empieza yendo a la escuela de su madre, continúa en la de su padre y comienza el

Bachillerato como alumno libre del Instituto San Isidro de Madrid. Aquí conocerá al profesor Pedro Puig Adam, quien le inicia en la resolución de problemas, y consiguiendo que se publique una de las soluciones de Sixto en la Revista Matemática Hispano-Americana<sup>1</sup>.



Padre de Sixto con sus alumnos

Por diferentes motivos<sup>2</sup>, decide estudiar la carrera de Exactas en la Universidad Central de Madrid. En el año 1931 consigue una beca de estudiante del Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios (JAE), donde conocerá a Julio Rey Pastor. Terminó la licenciatura con la calificación de Sobresaliente Cum Laude y Premio Extraordinario en el año 1932. Este mismo año comenzó a trabajar, junto a su compañero L.A. Santaló, como ayudante de clases prácticas<sup>3</sup> de Análisis Matemático de primer curso para el profesor Barinaga. Al año siguiente obtiene por oposición la plaza de auxiliar de Análisis IV<sup>4</sup>. Su tesis doctoral titulada “Sobre la hiperconvergencia de las integrales de Laplace Stieltjes”, dirigida por Julio Rey Pastor es del año 1935, aunque su publicación es de 1936.

<sup>1</sup> Revista Hispano-Americana, 2ª Serie, Tomo II, Abril 1927, nº 4, donde aparece, debido a su corta edad de catorce años, como “un solucionista de calzón corto”.

<sup>2</sup> En principio había pensado en hacer Caminos, ya que al finalizar la propia Escuela conseguía trabajo, sin embargo algunos alumnos tardaban algunos años en superar la prueba de entrada a la Escuela, y también se podía pasar a dicha escuela habiendo realizado uno o dos cursos de Exactas.

<sup>3</sup> En este curso la Facultad de Ciencias no pagaba nada por este trabajo.

<sup>4</sup> El catedrático era el profesor Rodríguez Bachiller.



Sixto Ríos en la década de los años cuarenta,  
y con la familia de Puig Adam



Con el uniforme de Capitán

Durante la guerra civil, a pesar de tener exento el Servicio Militar por problemas de salud, se presenta voluntario en la Comandancia Militar de Cercedilla<sup>5</sup>. Terminada la guerra, pese a los problemas de depuración universitaria<sup>6</sup>, vuelve a su trabajo en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid.

La Real Academia de Ciencias le concede en 1940 la Cátedra de la Fundación Conde de Cartagena<sup>7</sup>. A partir de 1941 va ampliando su trabajo en el Instituto Jorge Juan<sup>8</sup> del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), como profesor de la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos de Madrid y opositando a la cátedra de Análisis Matemático de la Universidad de Valencia, de la que se trasladará a Valladolid<sup>9</sup>. En 1944 pasa a formar parte del cuerpo de Ingenieros Geógrafos como Jefe de Negociado de 1ª Clase. Un año después es contratado por la Facultad de Ciencias Políticas y Económicas de la Universidad de Madrid como profesor encargado de curso<sup>10</sup>. En 1948 accede por oposición a la Cátedra de Estadística Matemática<sup>11</sup> de la Universidad de Madrid. Desde este

<sup>5</sup> Su familia se fue aquel verano a Cercedilla y él estuvo dando clases de Matemáticas por las noches en la “Cumbre de Guadarrama”, chalet donde se reunía el Estado Mayor del Ejército.

<sup>6</sup> Para arreglar ciertos papeles necesitó ayuda de su tío Hermenegildo Alfonso Ríos, que era Comandante de Carabineros.

<sup>7</sup> Primero por cinco años, que serán prorrogados por otros cinco.

<sup>8</sup> En primer lugar es becario, después colaborador, y a partir de enero de 1943, Jefe de la Sección de Análisis.

<sup>9</sup> Desde Valladolid viene a Madrid todas las semanas para continuar con su labor en el CSIC.

<sup>10</sup> Cargo que desempeñará hasta 1953.

<sup>11</sup> Esta cátedra había quedado vacante por el fallecimiento de D. Olegario Fernández Baños y había sido ocupada interinamente por Esteban Terradas.

momento su labor se centrará en elevar el nivel estadístico español en todos sus ámbitos. En primer lugar inicia la investigación estadística con una nueva Escuela de Estadística<sup>12</sup> y posteriormente impulsará la Investigación Operativa para ayudar a la industria española a progresar empleando los métodos estadísticos más modernos.



En prácticas topográficas por la sierra de Gredos

El 9 de Mayo de 1949 es nombrado consejero adjunto del Patronato “Alfonso el Sabio” del CSIC. Ese mismo mes se traslada a Francia para realizar estudios relacionados con la organización del Instituto de Estadística Matemática de París, con los Profesores Fréchet y Darmois y con el Instituto de la Opinión Pública francés, que dirige el Profesor Stoetzel. A petición suya, el 20 de Julio de 1949, el Consejo Ejecutivo del CSIC crea un Departamento de Estadística Matemática integrado en el Instituto Nacional de Matemáticas y le designa a él como Jefe de dicho Departamento<sup>13</sup>.

En 1950 se crea el Instituto de Estadística e Investigación Operativa, en el CSIC, del que es nombrado director. Este Instituto, asociado a la Cátedra, le permite practicar el servicio de consultas a las empresas y otros organismos, formando a los alumnos en los problemas de la realidad, que después proporcionan temas para tesis y otras investigaciones teóricas y permiten la formación más completa de alumnos e investigadores. Este mismo año comienza la publicación de la Revista Trabajos de Estadística e Investigación Operativa de la que es director<sup>14</sup>.

<sup>12</sup> Véase “La creación en España de la primera escuela de Estadística” en Historia de la Probabilidad y de la Estadística, por Escribano Ródenas, M.C , Busto Caballero, A.I. Ed. AC. (2002). Págs 205-220

<sup>13</sup> Este mismo año viaja a Roma, pensionado por el CSIC, para estudiar la organización de la enseñanza y la investigación en Estadística.

<sup>14</sup> Actualmente, desaparecido ya el Instituto, esta revista se ha desintegrado en dos revistas filiales llamadas TEST y TOP que publica la actual Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO).



Inauguración de los cursos de Estadística. De izquierda a derecha, señores Artigas, San Miguel de la Cámara, Alcázar, Fréchet, Ríos, Melón, Ros y Lasheras.

Este año de 1950 fue muy importante en la vida de Sixto Ríos, tanto en su persona, como en su familia, como en lo profesional. El 26 de julio<sup>15</sup>, contrae matrimonio con M<sup>a</sup> Jesús Insua Negroa en la Iglesia del Espíritu Santo del CSIC. De este matrimonio nacerán seis hijos: M<sup>a</sup> Jesús, Cristina, Sixto, Valeria, David, y Alba<sup>16</sup>.



Sixto Ríos con su mujer M<sup>a</sup> Jesús, y con todos sus hijos en la foto del carné de familia numerosa

---

<sup>15</sup> Tras seis meses de noviazgo formal. La había conocido dos años antes en uno de los guateques a los que asistió con su buen amigo Antonio Insua Negroa, hermano de la que sería su futura mujer, y futuro Catedrático de la Escuela de Ingenieros de Montes de la Universidad Politécnica de Madrid.

<sup>16</sup> Todos ellos realizarán estudios universitarios para orgullo de sus padres.

En 1954 es comisionado por el Patronato Juan de la Cierva para estudiar el desarrollo de la Investigación Operativa en Inglaterra. Este mismo año es nombrado Experto de la UNESCO, Consejero de la Dirección General de Estadística del Gobierno de Venezuela y Jefe de la Misión para organizar la enseñanza de la Estadística en la Universidad de Caracas. Por este motivo se trasladó junto con su familia a Caracas, ciudad en la que residió durante seis meses y en la que creó la Escuela de Estadística en la Universidad Central de Venezuela, con un plan de estudios e investigaciones similar al de la Escuela de Madrid.

El 1 de noviembre de 1957 ingresa en la empresa S.A. IBÉRICA BEDAUX en calidad de Asesor en Investigación Operativa y posteriormente en METRA en calidad de director científico de SOFEMASA. Estos nuevos trabajos en la empresa privada le permiten estar en contacto directo con la industria española y europea, aplicando sus conocimientos en Investigación Operativa y Teoría de la Decisión a problemas prácticos y reales que surgen en las empresas españolas de la época, con lo que se benefician extraordinariamente sus actividades en la docencia e investigación de la Universidad de Madrid y del CSIC. También tuvo contactos por algunos años con algunas empresas importantes como RENFE, COCA-COLA,...

Es nombrado como Académico Numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, en enero de 1959 y dos años más tarde obtiene el Grado de Doctor Ingeniero Geógrafo. El 21 de junio de 1961 lee el discurso de entrada en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, cuyo tema es “Procesos de Decisión”. El discurso de contestación lo pronuncia Julio Rey Pastor, éste será el último acto académico en el que intervino Rey Pastor en la Academia de Madrid<sup>17</sup>, pues el 21 de febrero del año siguiente, fallecerá en Buenos Aires<sup>18</sup>.

Un grupo de investigadores del CSIC fundan en 1962<sup>19</sup> la Sociedad Española de Investigación Operativa (SEIO) de la que Sixto Ríos será el segundo presidente, después de D. Fermín de la Sierra. A partir de 1976 dicha Sociedad será conocida como SEIOEI (Sociedad Española de Investigación Operativa, Estadística e

---

<sup>17</sup> En el discurso Julio Rey Pastor dice textualmente para elogiar a Sixto Ríos: “Dentro de la modestia que en la jerarquía científica universal corresponde a los países en desarrollo, Sixto Ríos ha alcanzado la línea epónima entre los hispanohablantes... Fue en este capítulo donde cosechó su máximo triunfo epónimo, demostrando el teorema fundamental publicado en Hamburgo y Roma y que, por iniciativa del profesor suizo Hadwinger, ha recibido desde 1944 la denominación de Teorema de reordenación de Ríos”

<sup>18</sup> Sixto Ríos pronunciará un discurso en la sesión necrológica en homenaje a Rey Pastor en la Real Academia de Ciencias de Madrid.

<sup>19</sup> Este mismo año Sixto Ríos es contratado por la Office of Naval Research U.S.A. para dar una conferencia en Washington sobre Inventory Problems, que se publicará con ocasión del X Aniversario de la Fundación de la Operational Research Society of America. Y también por esta época visitó junto con el profesor Saaty “El juego de la Guerra” que tenía el Alto Estado Mayor de la Marina y que dirigía directamente el Almirante Carrero Blanco.

Informática), y en 1984 volverá a las siglas iniciales, esta vez con la nueva denominación de Sociedad de Estadística e Investigación Operativa.



Sixto Ríos y Julio Rey Pastor en la Real Academia de Ciencias

En enero de 1966 es nombrado Asesor de la Sección de Investigación Operativa del Instituto Nacional de Racionalización del trabajo y la Fundación Juan March le nombra Secretario de la Sección de Matemáticas<sup>20</sup>. Este mismo año la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires le nombra Académico Correspondiente. Con motivo de su desplazamiento a la Argentina para su ingreso en la Academia, atendiendo a las numerosas invitaciones de centros docentes y otros organismos, pronuncia gran número de conferencias y cursos en diversos países de Hispanoamérica<sup>21</sup>. Los frutos de este viaje son muy numerosos<sup>22</sup>.

<sup>20</sup> Este cargo le permitirá conseguir un buen número de becas de la citada Fundación para investigaciones en Matemáticas y Estadística.

<sup>21</sup> En Argentina dirigió un curso en el Instituto nacional de Tecnología Industrial y pronunció conferencias en la Universidad Nacional de Buenos Aires, en la Facultad de Ciencias Económicas, en la Junta de Investigaciones Científicas y Experimentales de las Fuerzas Armadas, y en la ciudad de Rosario. En Uruguay pronunció conferencias en la Universidad Nacional de Montevideo, en la asociación de Ingenieros del Uruguay y en el Instituto de Organización de Empresas. En Chile pronuncia varias conferencias en la Facultad de Economía de la Universidad Nacional de Santiago y en el Centro de Investigación y Enseñanza estadística (CIENES) de la Organización de Estudios Americanos (OEA). En Brasil pronunció una conferencia titulada "Procesos de decisión" en el Instituto de Física y Matemática de la Universidad de Pernambuco y otra en la Facultad de Filosofía de la Universidad Federal con el título "Desenvolvimento da Estadística na Espanha".

<sup>22</sup> Por ejemplo, cinco profesores españoles de Estadística e Investigación Operativa son contratados por diversas universidades de los países donde estuvo el profesor Sixto Ríos. También la Sociedad Argentina de Investigación Operativa propone al Agregado Cultural de la Embajada de España que el Instituto de Cultura Hispánica incluyera en sus programas el intercambio de científicos e investigadores operativos, así como la organización de un curso de nueve meses de duración, con Diploma especial de Estadística e Investigación Operativa, para becarios hispanoamericanos en la Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid, curso que se realizaría posteriormente durante diez años.

A instancias de Sixto Ríos se crea, por orden del B.O.E. de 18 de agosto de 1973<sup>23</sup>, la Sección de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid de la que se le nombra Presidente y posteriormente Director del Departamento desde su constitución.

Recibe el Premio “Francisco Franco” de Investigación en Ciencias, otorgado por el CSIC, en 1975, y al año siguiente en 1976, recibe el Premio Nacional de Investigación Matemática de las manos del Rey Juan Carlos I.



Recibiendo el Premio Nacional de Investigación Matemática de manos del Rey Juan Carlos I

Fue nombrado Honorary Fellow de la Royal Statistical Society desde 1978, y Consejero del Consejo Superior de Estadística el 1 de junio de 1979. En mayo de 1981 es invitado por el Institut de Statistique des Universités de París para dar varias conferencias sobre la Teoría de la Decisión<sup>24</sup>.

El 19 de diciembre de 1983, la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid le rinde un homenaje con motivo de su jubilación y le otorga la Medalla de Oro por los cincuenta años de docencia en esta Facultad. Aunque esto no significa el final de su trabajo científico.

En 1992, junto con otros académicos<sup>25</sup>, forma un Grupo de Análisis de Decisiones (GAD)<sup>26</sup> dentro de la Real Academia de Ciencias y dirige varios

<sup>23</sup> También este año de 1973 es invitado a dar una Conferencia en el Congreso Internacional de Estadística en Viena que se tituló “Sur la fonction de decision de Bayes”. En el siguiente Congreso Internacional de Varsovia, que se celebró en 1975 también participó con la conferencia titulada “Ordre quasibayesian des decisions”.

<sup>24</sup> En esta ocasión coincidió con los profesores Theodorescu, Wertz y Silvermam.

<sup>25</sup> Entre ellos estaban Maravall, García Barreno, Girón y Jiménez Guerra.

<sup>26</sup> Su objetivo es organizar algunos Seminarios dirigidos a grupos de alumnos de la Facultad de Informática, economistas de la Administración de la Sanidad, médicos del Instituto de Investigación del Hospital Gregorio Marañón, militares de la Secretaría General Técnica del Ministerio de Defensa, de la Escuela Politécnica Superior del Ejército y de la Escuela Superior de Armas Navales. Estos Seminarios contribuyeron a la formación de personas que introdujeron en

proyectos de investigación que tienen importantes aplicaciones en los distintos campos de la sociedad. En este mismo año, la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, inaugura un Seminario con su nombre en el nuevo edificio construido para la Facultad, como un pequeño homenaje más hacia la persona de Sixto Ríos.

Gracias a la iniciativa de Sixto Ríos, se crean en 1995 los estudios conducentes a la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas en la Universidad española.

Falleció en su casa de Madrid, el 8 de Julio de 2008. Un mes antes había sufrido la pérdida del mayor de sus hijos varones Sixto<sup>27</sup>. Los restos mortales de Sixto Ríos García descansan desde entonces en el cementerio de San Roque de Becerril de la Sierra (Madrid).

## Rasgos relevantes de la obra científica del profesor Ríos García

Se puede decir que la labor investigadora de Sixto Ríos García comienza cuando de niño su padre le planteaba problemas para resolver. Su profesor preferido en el Bachillerato, Pedro Puig Adam, sigue incentivando su amor por la investigación y le anima a resolver los problemas que se publicaban en la Revista Matemática Hispano-Americana. Pero su incorporación definitiva a la estructura de investigación tiene lugar en 1931 cuando obtiene una beca de estudiante del Seminario Matemático de la JAE. Cuando tiene 19 años, leyendo un libro de Hadamard y Mandelbrojt, encuentra un error en la demostración de un importante teorema del segundo autor, y se lo comenta a Rey Pastor quien se lo confirma. La rectificación de esta demostración se publicará en los “Comptes Rendus”<sup>28</sup>. Posteriormente, se especializa en teoría de funciones analíticas, y en su tesis introduce una nueva idea para considerar las sucesiones parciales para la prolongación analítica de una integral de Laplace<sup>29</sup>.

---

sus profesiones la metodología del Análisis de Decisiones y permitieron recoger material de trabajo sobre problemas actuales que tienen los grupos anteriores y sobre los que trabajará el GAD. De estos seminarios surgieron proyectos de investigación de aplicaciones concretas de la Teoría de la Decisión a problemas reales y prácticos de los distintos campos de la actividad humana, entre los que cabe destacar: Gestión de embalses, Gestión de la asistencia respiratoria extracorpórea, Diagnóstico precoz del cáncer de mama y Gestión de recursos naturales.

<sup>27</sup> Sixto Ríos Insua falleció el 11 de Junio de 2008 aquejado de una grave enfermedad.

<sup>28</sup> A partir de aquí tiene una polémica en la que intervino el propio Hadamard. Este disputa se zanjó a favor de Sixto Ríos por sendas recensiones de Bieberbach y Bernstein, en el Jahrbuch y Zentralblatt.

<sup>29</sup> Los teoremas principales de esta tesis fueron publicados en la Revista de la Academia de Ciencias en 1936 y recogidos después en el tratado de Doetsch (Berlín 1950). Los mismos resultados fueron obtenidos posteriormente por Hirschmann, quien los publica en su Memoria “Two power series theorems extended to the Laplace Transform”. (Duke Math. Journal, 1944).

Consigue resolver algunos problemas sobre series de Dirichlet de densidad máxima infinita<sup>30</sup> y los publica en la Universidad de Oporto, en 1942. Un año más tarde estudia el tema de la posibilidad de génesis en las series de Dirichlet generales de ultraconvergencia por reordenación, y sus resultados los publicará en una memoria de las *Abhandlungen de Hamburgo*<sup>31</sup>. La idea de reordenación para lograr un nuevo método de prolongación analítica es completamente original del autor, se conoce como “El teorema de reordenación de Ríos” y fue el tema de una conferencia en la Sociedad Matemática Suiza en 1946 por el Profesor Hadwiger. Son también importantes sus trabajos relativos a familias normales, espacios de Banach, espacios funcionales de series potenciales, etc<sup>32</sup>.

Sus estudios y la investigación realizada como especialista en Análisis Matemático le fue muy útil y le facilitó el trabajo en su nuevo campo de investigación, la Estadística Matemática<sup>33</sup>. Entre sus trabajos de Probabilidad y Estadística destacan los relativos a Máximos y Mínimos en poblaciones finitas, cuyos resultados serán después utilizados por el profesor Marco Brambilla en varias memorias y en su libro *Programazione Matematica*. En los trabajos relativos a estimadores satisficentes introduce la definición posteriormente conocida como de Dynkin o bayesiana (Congreso de Palermo 1982). También se cita el “criterio de Ríos de medida de la bondad en un estimador” obtenido después por Savage. Este criterio, a veces, será citado como el “criterio de Ríos-Savage”.

Estudia los métodos de estimación asociados al criterio de riesgo fijado ( $R-\epsilon$ ) introducido por él, relacionándolo con otros criterios convencionales. Varias tesis y trabajos de sus discípulos (Layachi, de la Horra,...) y trabajos posteriores (1999) de Le Calci, Montessano,... continúan profundizando en su estudio.

Introduce un nuevo enfoque de la Teoría de la Decisión<sup>34</sup>, que es un tratamiento coherente más general y realista que el bayesiano, ya que supone una información a priori parcial. Sus desarrollos han sido continuados por Girón, Good, etc. y son citados en los libros de Berger, French, P.L.Hammer y Kotz-Johnson. Destacan los trabajos de Procesos de decisión en concurrencia, que han sido continuados por sus discípulos, dentro de la Investigación Operativa. También son importantes sus

<sup>30</sup> En la Colección Borel, la monografía de W. Bernstein había dejado algunos difíciles problemas abiertos.

<sup>31</sup> Este trabajo contiene además otros enfoques válidos para la representación de funciones por series de polinomios y prolongación analítica por reordenación.

<sup>32</sup> Sus trabajos fueron publicados en revistas de categoría mundial como los *Abhandlungen de Hamburgo*, *Rendiconti delle Reale Accademia dei Lincei*, *Revista de la Real Academia de Italia*, *Comptes Rendus de L'Académie de París*, etc., y fueron y siguen siendo citados por importantes científicos extranjeros y españoles como Doetsch, Hadamard, Fréchet, Guizetti, Hadwiger, Rey Pastor, etc.

<sup>33</sup> Aunque sus investigaciones en Análisis son fecundas y prometedoras, sin embargo pasa a dedicarse por entero a la Estadística y a la Investigación Operativa, Sixto Río nos explica las razones que tiene para ello en una entrevista que le hacen los profesores D. José Javier Etayo y D. Ángel Ramos, que se publicó en *Nueva revista* nº 48, Págs. 22-23. Diciembre 1996-Enero 1997.

<sup>34</sup> En el Congreso de Varsovia de 1977.

contribuciones al estudio de un nuevo funcional de utilidad con riesgo fijado, que tiene notables ventajas en algunos aspectos sobre la utilidad de V. Neuman, como han observado varios autores posteriores: Fishburn, Tversky, etc. Tal concepto está ligado al del método de decisión satisfaciente, desarrollado por él en el Congreso de Hamburgo en 1981. La idea de los métodos de decisión satisfacientes le conduce a una nueva introducción de los intervalos de confianza que es muy intuitiva y aplicable.

También son importantes sus trabajos sobre la Teoría de Inventarios y la Teoría de Búsqueda<sup>35</sup>. Y dentro del ámbito de la Decisión Multicriterio hay que citar sus trabajos sobre las aplicaciones al problema de la Cartera que fueron expuestos en varios cursillos en las Universidades de París y Rabat, así como en los Congresos de Hamburgo de 1981, de Mons (Bélgica) en 1982 y de Palermo en 1982 en los que desarrolló modelos de selección de la Cartera con multiatributos (rentabilidad, liquidez, etc.)<sup>36</sup>.

## Conclusiones

Una de las más encomiables cualidades del profesor Ríos ha sido siempre, la preocupación por sus discípulos, a los que ha cuidado como si fueran verdaderos hijos. Ha estado siempre al tanto de sus progresos, investigaciones, oposiciones a cátedras, publicaciones y cualquier otro empeño en el que ellos se aventurasen, pensando que el trabajo de ellos era vital para conseguir el objetivo que se había marcado: igualar el nivel estadístico español con el de los países más desarrollados. Ha sido director de tesis de más de 40 discípulos, entre ellos más de 16 son Catedráticos de Universidades españolas y algunos de ellos directores de Centros Estadísticos de Hispanoamérica. Además tiene un gran número de “nietos científicos” en toda España, muchos de ellos Catedráticos de distintas Universidades españolas y extranjeras. Todo ello ha ido forjando a lo largo de su vida toda una escuela de investigadores que actualmente siguen siendo, a su vez, nuevos maestros con nuevos discípulos. De un modo especial cuidó la relación de los Centros en que se formaban sus discípulos y los análogos de Europa y América, logrando con su actividad, relaciones personales, colaboración mutua, y una importante actividad de profesores visitantes extranjeros a dichos Centros. Así el Profesor Hermann Wold de la Universidad de Upsala (Suecia) tuvo varias estancias de dos meses en el Departamento de Estadística del CSIC. También debemos citar las visitas de los profesores Cramer, Mahalanobis, Fréchet, Fortet, ...

---

<sup>35</sup> Fueron expuestos en el Congreso Internacional de IFORS (International Federation of Operational Research Societies) celebrado en Washington en 1996, donde en una “batalla de preguntas”, se le consideró como el *padre de la Investigación Operativa en España*.

<sup>36</sup> Fueron sistematizados en su libro *Procesos de Decisión Multicriterio* publicado en 1990, en colaboración con sus hijos M<sup>o</sup> Jesús y Sixto.

El retraso de más de medio siglo en conocimientos estadísticos respecto a otros países, que percibió Sixto Ríos al tomar posesión de la Cátedra de Estadística en la Universidad Central de Madrid, no se podía paliar con el trabajo y las investigaciones de una sola persona; por eso, para elevar el nivel español en esta disciplina, crea una escuela de investigadores y didactas en Estadística que bajo su dirección logra llevar a España a foros internacionales y pone a nuestro país a la misma altura que los países más avanzados en esta materia.



Sixto Ríos con algunos de sus discípulos



Sixto Ríos con sus tres hijos doctores

Sixto Ríos García ha conseguido con una vida dedicada al trabajo, a la investigación y al estudio científico, que su esfuerzo no sea uno mas en este gran océano de la ciencia, sino que los actuales profesionales de la Medicina, la Abogacía, la Economía, la Psicología, la Política, la Defensa Nacional, entre otros, tomen conciencia en su práctica diaria de la necesidad de aplicar la Ciencia Estadística en general, y en particular el “Análisis de Decisiones”, siendo éste acogido con respeto y entusiasmo por la sociedad en general y más especialmente por los expertos en las distintas disciplinas científicas.

## Bibliografía

- ESCRIBANO RÓDENAS, M. C. y BUSTO CABALLERO, A. I. (2002): “Primeros intentos para la organización de la enseñanza de la Estadística en España: Cursos de Estadística y sus aplicaciones, 1950-5”. En *Historia de la Probabilidad y la Estadística*. Ed. AC, 193-204.
- (2002): “La creación en España de la primera escuela de Estadística”. En *Historia de la Probabilidad y la Estadística*. Ed. AC, 205-220.
  - (2009): *Sixto Ríos García: el matemático que impulsó la Estadística española en el siglo XX*. La Gaceta de la RSME, Vol. 12, nº 2, 369-391.
- ETAYO, J. J. y RAMOS, A. (1996): “Entrevista a Sixto Ríos “Practico el Deporte Diario de Inventarme problemas y resolverlos”. *Nueva Revista* nº 48, 15-26.
- ETAYO, J. J. (1990): 75 “Años de Vida Matemática”. En *Actas de las XI Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas*, vol. 1, 23-42. Évora.
- GIL ÁLVAREZ, P. A. (2000): *Discurso del padrino* en el Acto de Investidura como Dr. Honoris Causa por la Universidad de Oviedo.
- INFANTE, R. (2001): *Laudatio del profesor Dr. D. Sixto Ríos García*, en el Acto Solemne de Investidura como Doctor Honoris Causa del Excmo. Sr. D. Sixto Ríos García. Universidad de Sevilla.
- LAÍN ENTRALGO, P. (1956): *España como problema*. 2 vols., Aguilar, Madrid.
- MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): “Notas sobre la Historia del Cálculo de la Probabilidad”. En *España en Zulia* nº 15, 155-167. Logroño.
- PERALTA, J. (2000): *La Matemática Española y la Ciencia de finales del siglo XIX*, Ed. Nívola. Madrid.
- REY PASTOR, J. (1961): *Discurso de contestación al Excmo. Sr. D. Sixto Ríos*, Real Academia de Ciencias Físicas, Exactas y Naturales, 33-53.
- RÍOS GARCÍA, S. (1961): “Rey Pastor, Maestro de Matemáticos”. *Revista Hispano – Americana*, 4ª serie, tomo XII, nº 2, 106-107.
- RÍOS, S. (1950): “Necesidad de una Escuela de Estadística”. En *Trabajos de Estadística*, vol. I, fasc. 2, 3-11. Madrid
- (1994): “La revolución probabilística. Historia de la Matemática del siglo XIX”. *Revista de la Real Academia de Ciencias*. Real Academia de Ciencias. Madrid.
- SÁNCHEZ DEL RÍO, C. (1999): *Discurso homenaje a la Antigüedad Académica*, Instituto de España, 5-9.
- VALLE, A. (2000): “Cincuenta años de Matemáticas en el recuerdo”. En *Boletín de Sociedad de Matemática Aplicada* (S.E.M.A.), nº 15, 73-88. Córdoba.

## CAPÍTULO 10

# Reflexiones sobre la introducción de la Estadística en la Economía Española

M<sup>a</sup> DEL CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS  
GABRIELA M. FERNÁNDEZ BARBERIS  
Universidad CEU San Pablo

### Introducción

La Ciencia Estadística ha ido surgiendo de las metodologías utilizadas en otras ciencias para resolver sus problemas, es decir, se trata de una ciencia interdisciplinar. Sus ideas y progresos se registran inevitablemente en íntima relación con el desarrollo de otras disciplinas. Según ciertos investigadores, la historia de la Estadística comienza al final de siglo XVII con el nacimiento de la Aritmética Política y los seguros de vida. Según otros, comienza en la segunda mitad del siglo XVIII con la evolución del Cálculo de Probabilidades y el Cálculo de Observaciones Astronómicas<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Ríos, S. (1989): Historia de la Ciencia Estadística. Real Academia de Ciencias, Exactas, Físicas y Naturales, pp. 12-13. Realigraf S.A. Madrid.

En el siglo XIX toma ya una importancia relevante en todo el mundo, especialmente en Europa donde se han creado algunas sociedades profesionales. Por ejemplo, en 1835 se creó la Real Sociedad Estadística de Londres y en 1860 la Sociedad de Estadística de París. En España habrá que esperar hasta 1945, casi un siglo después, para la creación del Instituto Nacional de Estadística (I.N.E.), hasta 1952 para que se cree la primera escuela de Estadística y hasta 1962 para que se cree la actual Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa (S.E.I.O.).

Sin embargo, el inicio de la Estadística Oficial en España se considera que tuvo lugar en 1856 con la creación de la Comisión General de Estadística del Reino<sup>2</sup> anciana precursora del I.N.E., aunque el primer intento de formar este organismo parece ser que fue de D. Pedro López de Lerena, Secretario de Despacho de Hacienda, en 1789. Este organismo llamado Oficina de Balanza se fundó en 1802 con poco éxito debido a la invasión napoleónica y al cierre de la citada oficina<sup>3</sup>.

## Antecedentes

Según algunos investigadores<sup>4</sup>, los escritores políticos españoles empleaban una buena parte de su trabajo en la colección e interpretación de cifras estadísticas. Por ejemplo, podemos citar, a principios del siglo XVII, a D. Sancho de Moncada, quien escribe “Restauración Política de España”, obra editada en 1619, que en su capítulo XII realiza un análisis cuantitativo aproximado de la balanza de pagos española. Casi medio siglo después, en 1668, el dominico Juan de Castro realiza una estimación sobre el valor de las importaciones españolas y critica el abandono en que se tienen las estadísticas<sup>5</sup>.

Otro medio siglo después, el motrileño D. Francisco Martínez de la Mata, escribe un “Memorial”, editado en 1701, donde ofrece datos sobre el desempleo que en ese momento histórico se extendía por Castilla. Estos datos le sirvieron para

---

<sup>2</sup> Sven Reher, D. (1997): “Fuentes históricas para el estudio de la población española”. Fuentes Estadísticas Nº 25, pág. 15. Madrid.

<sup>3</sup> García España, E. (1997): “Las estadísticas históricas en el I.N.E.”. Fuentes Estadísticas Nº 25, pp. 12-13 Madrid.

<sup>4</sup> Véase por ejemplo la opinión del economista austríaco Joseph Alois Schumpeter (1883-1950) o la del economista español Juan Velarde Fuentes (1927- ).

<sup>5</sup> En 1969 se edita su “Discurso político del maestro fray Juan de Castro, de la Orden de Predicadores, sobre los medios que ha dado para remedio del Reyno”, y también su “Memorial para remedio de los daños de la Monarquía de España”.

que poco después, el asturiano D. Pedro Rodríguez de Campomanes<sup>6</sup> le comparase con grandes economistas como Petty y Child<sup>7</sup>.

El primer Conde de Campomanes<sup>8</sup>, D. Pedro Rodríguez de Campomanes a quien se adjudicó en 1780 dicho título a pesar de no proceder de la nobleza, sino por sus méritos y su influencia política, dice textualmente, en el apéndice de una de sus últimas obras escritas<sup>9</sup>, apoyando a los economistas concedores de la estadística, a los que llama escritores de la aritmética política:

*“Sin escritores de aritmética política ninguna nación llega a conocer bien sus intereses, ni los medios de arrojar la miseria, compañera inseparable de la ignorancia. La estimación que los ingleses y los franceses han dado a tales escritores, es la que ha puesto su industria en tan floreciente estado. Reclamar contra semejante estudio, sería lo mismo que aspirar a apagar la luz y declarar la guerra al celo público y a la verdad”*<sup>10</sup>.

Lo cierto es que esta opinión sobre la necesidad de datos estadísticos para la economía española sigue en el pensamiento de casi todos los economistas posteriores. Por ejemplo, D. José López de Peñalver, en su obra “Reflexiones sobre la variación del precio del trigo” cuya publicación data de 1812<sup>11</sup>, insiste en el tema con las siguientes palabras:

*“Llegará un día en que los elementos de la economía política sean en gran parte un ramo del cálculo; y el averiguar los datos será ocupación de establecimientos permanentes que apreciarán los Gobiernos, porque a ellos tenderán que acudir para arreglar y distribuir las contribuciones, señalar la especie y cantidad de los derechos de entrada y salida, conocer las causas de la prosperidad y decadencia de la riqueza y de la fuerza pública, y saber lo*

<sup>6</sup> Presidió el Consejo de Castilla en 1786, y fue Ministro de Hacienda en 1760. Además, en 1762 había sido Fiscal del Consejo de Castilla, y en 1765 Presidente del Consejo de la Mesta.

<sup>7</sup> William Petty (1623-1687), Josiah Child (1630-1699).

<sup>8</sup> Es reconocida por los historiadores su aportación a la historia española y su conocimiento sobre la realidad política y social de la Europa de la época, por lo que fue nombrado miembro de la Real Academia Española en 1763 y un año después Presidente de la Real Academia de la Historia.

<sup>9</sup> “Discurso sobre la educación popular de los artesanos y su Fomento”, obra editada en Madrid, 1775, en la imprenta de D. Antonio de la Sancha, que tiene un apéndice y un suplemento al apéndice.

<sup>10</sup> Citado por Juan Velarde Fuentes, pág. 697, del artículo “Madoz sobre Madrid, o sobre los primeros pasos de colaboración entre economía y estadística”, en INE *Homenaje al Profesor Gonzalo Arnaiz Vellando*. Madrid 1987.

<sup>11</sup> Este volumen sería reeditado por el profesor D. Fabián Estapé, del Dpto. de Teoría Económica de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Barcelona, con motivo de su Discurso inaugural del año académico 1963-64, titulado “Las inversiones en enseñanza y el desarrollo económico”.

*que deben esperar o temer, creer o dudar en puntos de la mayor gravedad y trascendencia*”<sup>12</sup>.

En opinión del profesor Velarde<sup>13</sup>, las fuentes que sirvieron de base para la obra de Madoz, para los 30 tomos de la *Historia General de España*, de D. Modesto Lafuente, y para la *Historia de la Guerra Civil* de D. Antonio Pirala, fueron prácticamente las mismas. Éstas se enumeran a continuación<sup>14</sup> junto con otras, que el profesor Velarde no cita, pero que creemos pudieron igualmente servir como ayuda y referencia para las obras citadas:

*Teoría y práctica del comercio y marina*, de Uztariz (1712-1717)<sup>15</sup>.

*Catastro del Marqués de la Ensenada* (1749-1753)<sup>16</sup>.

*Censo del Conde de Aranda*, de 1768<sup>17</sup>.

*Diccionario*, del coronel Alcedo<sup>18</sup>, publicado en 1786.

*La España dividida en provincias e intendencias*, de D. F. Javier Santiago Palomares, realizado a instancias del Conde de Floridablanca, en 1789<sup>19</sup>.

*Censo de 1797*, de D. Eugenio Larruga<sup>20</sup>.

<sup>12</sup> El profesor Estapé relaciona esta opinión a la corriente de pensamiento francés de aritméticos políticos como Diannyère, Lagrange y Lavoisier.

<sup>13</sup> Véase Pág. 702 del artículo del profesor Juan Velarde Fuentes, “Madoz sobre Madrid, o sobre los primeros pasos de colaboración entre economía y estadística”, en INE *Homenaje al Profesor Gonzalo Arnaiz Vellando*. Madrid 1987.

<sup>14</sup> Además de guías de correos, de postas, de caminos, y los numerosos archivos de la Administración.

<sup>15</sup> Esta obra que no es citada por el profesor Velarde Fuentes, es sin embargo una de las primeras referencias a la estadística económica de España, en los comienzos del siglo XVIII.

<sup>16</sup> Otra de las primeras obras de referencia en la estadística española que no es citada tampoco por el profesor Velarde, y que sin embargo, contiene ideas para averiguar el movimiento natural de la población.

<sup>17</sup> Esta obra no es citada por el profesor Velarde Fuentes.

<sup>18</sup> Antonio de Alcedo (1735-1812). El título completo es *Diccionario geográfico de las Indias occidentales o América*.

<sup>19</sup> Esta obra es citada a veces como el censo de Floridablanca, y algunos investigadores la sitúan en 1783, y otros en 1787. F. Javier Santiago Palomares (1728-1796) realizó esta obra publicada por la imprenta Real en 1789 y que lleva como título completo *España dividida en provincias é intendencias, y subdividida en partidos, corregimientos, alcaldías mayores : obra formada por relaciones originales qe. de orden de S.M. se pidieron por su ministro de Estado, Conde de Floridablanca, en 22 de Marzo de 1785, con un nomenclator o Diccionario de todos los pueblos del Reino, que compone la segunda parte*.

<sup>20</sup> Eugenio Larruga y Bonet publicó en 1787 este censo, con cuarenta y cinco volúmenes, con el nombre de *Memorias políticas y económicas sobre los frutos, comercio, fábricas y minas de España*, en la imprenta de Benito Cano, of. De Antonio Espinosa, y en 1788, también en la imprenta de D. Antonio Espinosa en 1788 publicó *Manual historico, cronologico, y geografico de los Imperios, Reynos, Pontifices, Emperadores, y Reyes que ha habido en Europa, desde el*

*Censo de Frutos y Manufacturas e islas adyacentes*, de 1799, impreso en 1803<sup>21</sup>.

*Diccionario geográfico e histórico de España*, del que sólo fue publicado, en 1802, por la Real Academia de la Historia la sección correspondiente a Navarra y Vascongadas<sup>22</sup>.

*Diccionario geográfico-estadístico de España y Portugal*, de D. Sebastián Miñano Bedoya, confeccionado entre 1826 y 1827 y editado en Madrid<sup>23</sup>.

*Diccionario de Hacienda, para uso de los encargados de la suprema dirección de ella*, de D. José Canga Argüelles<sup>24</sup>, 1826-27, publicado en cinco tomos, por la imprenta de M. Calero en Londres, y *Diccionario de Hacienda con aplicación a España*, publicado en Madrid, en la imprenta de Calero y Portocarrero, 1833-1834.

*Estadística de España*, de Alexandre Moreau de Jonnés<sup>25</sup>, 1834.

*Diccionario geográfico-histórico de la España antigua Tarraconense, Bética y Lusitana*, de D. Miguel Cortés y López<sup>26</sup>, 1935-36, publicado en Madrid, por la imprenta Real, en tres volúmenes.

*Manual de Diligencias*, de Gutiérrez González<sup>27</sup>, publicado en 1842.

*Guía del viajero en España*, de F. de P. Mellado, publicada a partir de 1842<sup>28</sup>.

*Nacimiento de Christo hasta fin del año de 1787, con la serie de los principales Concilios, y varias tablas Chronologicas, para su mejor uso...*

<sup>21</sup> El autor es D. Juan Polo y Catalina, y está publicado por la imprenta Real.

<sup>22</sup> El título completo es *Diccionario geográfico-histórico de España Sección I Comprende el reyno de Navarra, señorío de Vizcaya y provincias de Álava y Guipuzcoa*, 1802.

<sup>23</sup> En la Biblioteca Nacional existe un ejemplar, de la imprenta de Piesart-Peralta Moreno, donde se citan las fechas de 1826 a 1829, en once tomos. Sebastián Miñano Bedoya nació en 1779 y murió en 1845.

<sup>24</sup> José Canga Argüelles nació en 1771 y murió en 1842. También escribió en Londres *Elementos de la Ciencia de Hacienda*, en 1825, y es más conocido por la *Orden circulada por Don José Canga Argüelles como Intendente del ejército y reyno de Valencia a los dependientes y empleados de los ramos de Hacienda del mismo ejército y reyno, con el fin de establecer la Constitución política de la Monarquía Española y hacer efectiva la infracción de las leyes de tan sagrado código, asegurando la libertad individual del ciudadano*, publicada en Cádiz en 1812, en la imprenta Tormentaria.

<sup>25</sup> La primera edición de esta obra se hace en francés y se publica en París. La primera traducción al castellano la realiza D. José Garriga y Bancés, y se publica en Valencia en la imprenta de Cabrerizo, junto con dos mapas. La última edición, de la que se tiene noticia, es titulada *Estadística de España: territorio, población, agricultura, minas, industrias comercio, navegación, colonias, hacienda, ejército, justicia, é instrucción pública*, esta vez está traducida por D. Pascual Madoz é Ibañez, quien hace añadidos a la obra y una pequeña exposición de sus méritos políticos, llamando "amigo" a Moreau de Jonnés.

<sup>26</sup> Miguel Cortés y López (1776-1855).

<sup>27</sup> Publicado en Madrid por la imprenta de D. Eusebio Aguado.

<sup>28</sup> Se publica en 1842 con el título completo de *Guía del viajero en España : comprende una noticia histórica, estadística y geográfica del reino ...* y está editada por el Establecimiento tip.

## La Estadística Económica de Madoz

Sin duda, Pascual Madoz e Ibáñez<sup>29</sup> es una de las figuras españolas más importantes del siglo XIX, tanto en lo referente a la política, como a la economía, como a la estadística. Madoz estudió con los escolapios de Barbastro y en la Facultad de Derecho de la Universidad de Zaragoza. Si bien es cierto que durante su exilio político entre 1830 y 1832 consigue una formación francesa entre las ciudades de París y Tours, donde estudió geografía y estadística<sup>30</sup>.

Tras su regreso del exilio<sup>31</sup>, Madoz se instaló en Barcelona y empezó a formar parte del equipo encargado del “Diccionario geográfico universal” que se publica en 1834 en esta ciudad. En esta misma fecha obtiene el título de licenciado en Derecho y comienza a engendrar la idea de la que sería su gran obra monumental, el Diccionario Geográfico-Estadístico-Histórico de España y sus posesiones de Ultramar, que vería culminado en 1850<sup>32</sup>. Posteriormente, es voluntario al servicio de Isabel II. Con la primera guerra carlista, en 1835, pasa ser nombrado Gobernador militar y juez de primera instancia en la conflictiva zona del valle de Arán. Un año después será elegido diputado a Cortes por Lérida. En 1854 recibe el cargo de gobernador de Barcelona, designaciones que lo conducen a ser nombrado Presidente de las Cortes. En 1855 llega a ser Ministro de Hacienda, y tras la revolución de 1868 es nombrado Gobernador de Madrid. En 1870, murió en Génova, donde se encontraba de viaje hacia Florencia, para ofrecerle la corona española a Amadeo I de Saboya, Duque de Aosta.

Es obvio, que ese comienzo de la Estadística Oficial surge durante la vida de Madoz, pero no de la nada, sino que es el brote de una siembra anterior que se ha ido realizando poco a poco. Los Reales Decretos de de 23 de julio y 21 de septiembre de 1835, imponían a las diputaciones y ayuntamientos la obligación de suministrar datos para el censo y la estadística, al mismo tiempo que encargaban a los alcaldes el Registro Civil<sup>33</sup>.

Un Real Decreto de junio de 1837 ordenó el Censo General, el Real Decreto de 7 de febrero de 1841 dispuso la constitución de padrón de la riqueza, la Real Orden

de la calle del Sordo en Madrid. Al menos existen doce ediciones, la décima se publica también en Madrid, pero en 1864 por la imprenta de J. Bernat, y la última refundida con el título único de *Guía del viajero en España*, publicada en 1872 por Medina y Navarro Editores, en la imprenta de la Biblioteca de Instrucción y Recreo.

<sup>29</sup> Nació en Pamplona, 17-5-1806 y murió en Génova, 13-12-1870.

<sup>30</sup> En esta etapa de su vida conoce y aprende con el profesor francés Alexandre Moreau de Jonnés, al que después ayudaría a traducir su obra al español.

<sup>31</sup> Gracias a la amnistía de la reina María Cristina de Borbón.

<sup>32</sup> El diccionario será publicado en Madrid, con un total de dieciséis volúmenes, y once mil seiscientos ochenta y ocho páginas.

<sup>33</sup> En este momento funcionan los registros parroquiales de bautismos, defunciones y matrimonios que procedían de Trento.

de 11 de febrero de 1841 organizaba la estadística de montes, dentro del despliegue de la desamortización y sus consecuencias. La Circular de 27 de diciembre de 1841 organizó la estadística postal, y la circular del día siguiente la estadística mercantil. El Ministro de Hacienda del gobierno provisional, D. Mateo Miguel Ayllón creó el 21 de agosto de 1843 una Comisión de Estadística que se encargaría de ordenar los datos antiguos, de recoger otros nuevos y de redactar un proyecto para la organización definitiva de la estadística oficial. Esta comisión tenía como secretario al Sr. D. José María Ibáñez, y fue presidida por Pascual Madoz, quien asignó a dos jóvenes de conocida instrucción para que fuesen a estudiar las teorías de la ciencia estadística con todas sus aplicaciones<sup>34</sup>. Estos dos jóvenes fueron Juan B. Trúpita<sup>35</sup> y José Magaz<sup>36</sup>. La Comisión se suprimió al año siguiente, pero le dio tiempo a redactar un proyecto de ley sobre la organización de la estadística oficial en España, donde se proponía también la creación de cátedras de Estadística.

El gobierno moderado también impulsó la estadística. El Real Decreto de 10 de julio de 1846 dispuso la creación dentro del Ministerio de Hacienda, de una Dirección Central de Estadística de la riqueza. Y el Real Decreto de 1 de noviembre de 1851 creó una Comisión para examinar los datos recogidos acerca de la riqueza pública y proponer la manera de constituir registros de la riqueza individual parcelaria.

Durante el bienio progresista, Eusebio Pons y Sebastián Uriz presentan en Zaragoza en 1855, al Ministro de Hacienda, un “Proyecto de reglamento para el establecimiento y conservación de la estadística de la riqueza territorial del reino”.

Este ambiente pro-estadística, tanto en los gobiernos moderados como en los progresistas, consigue que se condecere a los grandes economistas y estadísticos extranjeros como al prusiano Engel<sup>37</sup>, que recibe la Cruz de Carlos III, por Real Orden de 3 de septiembre de 1862. También es condecorado Block<sup>38</sup>, a quien en la

<sup>34</sup> Madoz lo dice textualmente en el prólogo a su diccionario, incluyendo la cuantía de 50.000 reales destinada a este fin, y que le había sido asignada como sueldo.

<sup>35</sup> Juan Bautista Trúpita, publicará en 1847, la obra “Notas estadísticas sobre la extensión territorial, población, y situación financiera, política,...de las principales naciones de Europa”, en Madrid, en la imprenta de D. Baltasar González.

<sup>36</sup> En 1867 publicará la obra “Memoria general sobre la gestión administrativa de los diferentes ramos... de la Dirección General de Contribuciones durante el año económico de 1º de Julio de 1866 a igual fecha de 1867” en Madrid, en la imprenta de T. Fortanet, y diez años después, publicará también en Madrid, pero en la imprenta de M. Minuesa, la obra “Memoria Justificativa de las tarifas... que la Compañía del Ferro-Carril de Langreo somete a la aprobación”.

<sup>37</sup> Christian Lorenz Ernst Engel (1821-1896), se le atribuye la famosa ley de Engel, que dice que “cuanto más bajo es el ingreso familiar, más alta es la proporción de este ingreso invertida en víveres y alimentos”.

<sup>38</sup> Maurice Block (1816-1901), editor desde 1856 *L'Annuaire de l'économie politique et de la statistique* y autor del célebre *Traité theorique et pratique de Statistique* que publica en 1878 en París.

Real Orden de 12 de febrero de 1863 se le concede la Encomienda de Isabel la Católica.

## Cátedras de Estadística

La Comisión de Estadística de 1843 presidida por Madoz, propone entre otras cosas, en su proyecto de ley sobre la organización de la estadística oficial en España, crear cátedras de Estadística. Su proposición es rechazada, pero sirve de base a la Sociedad Económica de Amigos del País de Madrid para dar auge a esta disciplina.

En palabras del profesor Sánchez-Lafuente:

*“La obra de Madoz consistió esencialmente en que creó una conciencia de la necesidad tanto del estudio teórico como de la ejecución de estadísticas por parte del Estado de una forma permanente. Su contacto con los estadísticos de la época no fue accidental, sino un intercambio de ideas sobre la forma de solucionar problemas de la realidad”.*<sup>39</sup>

En el *Diccionario* de Madoz, bajo la palabra Madrid, se nos dice:

*“Cátedra de Estadística (calle del Turco, número 9). La Sociedad Económica, a propuesta de varios individuos de su seno, estableció en 1844 esta útil enseñanza desconocida hasta entonces en nuestras escuelas: graves fueron las dificultades que hubo de vencer y, entre ellas, la de hallar persona idónea que por primera vez emprendiese esta clase de educación. Pero afortunadamente recayó la elección en nuestro recomendable amigo don José María Ibáñez, uno de sus socios y vocal secretario (a propuesta nuestra) de la Comisión de Estadística, creada por real decreto de 21 de agosto de 1843. El señor Ibáñez no pudo menos de acceder a las instancias de la sociedad y, encargado de esta cátedra, se vio precisado a dar a luz una obra elemental en la que prescindiendo de opiniones y sistemas en general, presenta los principios más esenciales y su aplicación a la práctica, indicando los diversos y multiplicados objetos a que deben dirigirse las investigaciones del estadista. Más aún, antes de la publicación de esta obra se instaló la cátedra, cuya apertura tuvo efecto en sesión pública celebrada el día 1º de diciembre del citado año y para cuyo curso fueron 38 los individuos matriculados que continuaron con eficaz asistencia y bastante aprovechamiento los dos cursos académicos que terminaron en 1846. Posteriormente, y con auxilio del libro de texto, se da un curso completo cada año, asistiendo en el presente (1848) 22 matriculados y un considerable número de oyentes. Es de desear, y nos consta, se tiene solicitado que el*

---

<sup>39</sup> Sánchez-Lafuente Fernández, J. (1975): *Historia de la Estadística como ciencia en España (1500-1900)*. I.N.E. Madrid, pág. 139.

*Gobierno dé a este estudio un carácter público, según los da a los de Economía política y Administración, parte integrante de estas ciencias.*<sup>40</sup>

Como se acaba de decir, la primera cátedra de Estadística española nace en el seno de la Sociedad Económica de Madrid en 1844, siendo su primer catedrático José María Ibáñez y Ramos. Poco después de establecida la cátedra el profesor Ibáñez escribe el libro titulado *Tratado elemental de Estadística, así en la parte filosófica y de teoría, como en la aplicación de sus principios a la práctica*, que, como indica en su portada, *está redactado con arreglo a las lecciones explicadas en la cátedra de dicha ciencia, establecida por la Sociedad Económica Matritense*. Este libro ha sido considerado el primer tratado de Estadística escrito por un español, ya que en esa época sólo existía en castellano la traducción, por Vicente Díez Canseco, del libro *Elementos de la Ciencia Estadística* del portugués Sampaio, editado en 1841 y traducido al castellano el mismo año y pequeños opúsculos sobre estudios estadísticos concretos. Sin embargo, hace aproximadamente dos años, conocimos la existencia<sup>41</sup> del libro *Lecciones de Estadística*, redactadas por D. José Herrera Dávila<sup>42</sup> y D. A. Alvear<sup>43</sup>, publicado en 1829 en la imprenta de D. Mariano Caro de Sevilla. Este tratado sí que constituiría un primer libro de texto de Estadística en España, siendo además uno de los títulos de la primera parte de una Colección sobre las Ciencias, las Buenas Letras y las Nobles Artes<sup>44</sup>. En primer lugar, además del prólogo donde se indica que la obra es una exposición de las principales nociones del *Arte de formar el inventario de un Estado*, en la Introducción se parte de los denominados *Estados* y de lo que se llama Política o *arte de ordenar y gobernar*. Las siguientes lecciones se titulan Elementos y Reglas, Desarrollo práctico y preparatorio, Corografía, Etnografía y Nomografía. Para terminar están las lecciones de Aritmética Política y Conclusión de la Aritmética Política.

<sup>40</sup> Madoz, P. Tomo X, pág. 819.

<sup>41</sup> Gracias al profesor Dr. D. Javier Martín Pliego.

<sup>42</sup> D. José Herrera Dávila era Brigadier del cuerpo de Estado Mayor, en 1843 ayudó a realizar planos de Barcelona para la guerra carlista, a las órdenes del capitán general D. Miguel Araoz, en 1846 realizó planos de carreteras de Sevilla, y en 1848 realizó algunos planos de población de Sevilla con el auxilio y protección de D. Luis José Sartorius, Conde de Sartorius (1820-1871). También en 1828 publica *Lecciones de geografía universal*, y en la misma fecha, y misma imprenta de Mariano Caro, *Lecciones de historia romana*.

<sup>43</sup> Ambos autores escriben *Lecciones de antigüedades romanas*, que se publica en Sevilla por la imprenta de Mariano Caro, en 1827, también escriben *Lecciones de los imperios antiguos*, publicadas en Sevilla por los señores H. Dávila, LLera y Compañía en 1829 y en 1830 *Lecciones de Heráldica*, también publicadas en Sevilla por la imprenta del Diario del Comercio.

<sup>44</sup> Es un tratado de 113 páginas, con diez lecciones, y una colección de preguntas a dichas lecciones.

Tras la muerte del profesor Ibáñez (7 de octubre de 1856), el profesor Mariano de Marcoartu<sup>45</sup> pasa a encargarse de la cátedra de Estadística de la Sociedad Económica Matritense.

El 28 de agosto de 1850, siendo Ministro de Comercio, Instrucción y Obras públicas, Manuel de Seijas Lozano, se emite un Real Decreto reformando el plan de estudios vigente, por el que la Facultad de Filosofía queda dividida en las siguientes secciones: Literatura, Administración, Ciencias físico-matemáticas y Ciencias naturales. En la sección de Administración se imparte la asignatura de Estadística. Esta es la primera vez que en un plan de estudios se implanta la Estadística como asignatura independiente (aunque en la práctica se sigue impartiendo junto con la Economía Política y al principio se emplean los mismos libros de texto que para ésta). En la sección de Ciencias físico-matemáticas, sin embargo, no se estudia nada de Estadística.

A pesar de los textos españoles que como se ha visto ya han salido a la luz, el primer libro de texto de Estadística que se utiliza en las Facultades españolas, es la traducción al castellano del libro “Elementos de Estadística” de Moreau de Jonnés<sup>46</sup>. ¿Quizás por la amistad entre el influyente Madoz y el autor, en las etapas de gobiernos progresistas?

## Conclusiones

La estadística y la economía han llevado caminos paralelos con algunos puntos de contacto a lo largo de la historia de España. Se puede decir que es en el siglo XVIII, cuando existen algunos intentos de la economía para apoyarse en la estadística. Sin embargo, es en el siglo XIX cuando los puntos de contacto se van haciendo más frecuentes, y es aquí donde la figura de Pascual Madoz es muy importante.

No obstante, es una colaboración aún muy simple, basada en la toma de datos y no en el análisis matemático de éstos. Como reconocen estadísticos y economistas extranjeros, los datos numéricos son ahora más precisos y abundantes, pero aún no se ha aprendido a saber utilizarlos correctamente. Es más, la misma complejidad y extensión de los mismos asusta y retiene para utilizarlos adecuadamente. Se observa la falta un método para ordenar este volumen inmenso de información para poder investigar las leyes naturales de la Economía.

---

<sup>45</sup> Arquitecto y político español. Fue arquitecto municipal de Ávila. En 1855 presentó un proyecto de Estadística territorial.

<sup>46</sup> El original en francés es de 1834. La traducción al español es de Ignacio Andrés, segundo comandante de Infantería, y Casimiro Pío Garbayo de Bofarull, está publicada en Madrid, en el año 1857, por la imprenta de Francisco Abienzo.

En España habrá que esperar aún hasta el primer tercio del siglo XX para que esa Estadística Matemática prospere y consolide realmente una unión duradera con la Economía.

## Bibliografía

- A.H.E.P.E. (2002): *Historia de la Probabilidad y de la Estadística*. Ed. AC. Madrid.
- A.H.E.P.E. (2004): *Historia de la Probabilidad y la Estadística (II)*. Ed. Delta. Madrid.
- A.H.E.P.E. (2006): *Historia de la Probabilidad y la Estadística (III)*. Ed. Delta. Madrid.
- BUSTO CABALLERO, A. I.; ESCRIBANO RÓDENAS, M. C. (2008): “Tesis doctorales sobre estadística leídas en España en el siglo XIX”, en prensa.
- (2009): “Evolución de la enseñanza de la Estadística en España a lo largo del siglo XIX”. En J. Basulto and J. J. García del Hoyo (eds.), *Historia de la Probabilidad y la Estadística (IV)*, 89-98. Universidad de Huelva (Spain).
- ESCRIBANO RÓDENAS, M. C.; FERNÁNDEZ BARBERIS, G. M. (2004): “Participación Española en las primeras reuniones internacionales de Estadística”. En *Historia de la Probabilidad y la Estadística (II)*, 401-416. A.H.E.P.E. Ed. Delta. Madrid.
- (2009): “The Beginnings of the oficial Statistic in the Iberian Peninsula”. En *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, Vol. 25, nº 2 Junio 2009, 129-139.
- ESTAPÉ, F. (1963): *Las inversiones en Enseñanza y el desarrollo económico*. Discurso inaugural del año académico 1963-64. Universidad de Barcelona.
- MADOZ, P. (1850): *Diccionario Geográfico-Estadístico-Histórico de España y sus posesiones de Ultramar*. Madrid.
- SÁNCHEZ-LAFUENTE FERNÁNDEZ, J. (1975): *Historia de la Estadística como ciencia en España (1500-1900)*. I.N.E. Madrid
- (1987): “La Estadística española y el I.N.E.”. En *INE Homenaje al Profesor Gonzalo Arnaiz Vellando*. Madrid, 621-636.
- VELARDE, J. (1987): “Madoz sobre Madrid, o sobre los primeros pasos de colaboración entre economía y estadística”. En *INE Homenaje al Profesor Gonzalo Arnaiz Vellando*. Madrid, 693-722.
- (2002): “Aportaciones de los estadísticos españoles al análisis de la economía del siglo XX”. En A.H.E.P.E. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística*. Ed. AC. Madrid, 287-307.



## CAPÍTULO 11

# Geoestadística espacial y espacio-temporal: vino nuevo, cepas viejas

**G. FERNÁNDEZ-AVILÉS**

**J.M. MONTERO**

Universidad de Castilla-La Mancha

**J. MATEU**

Universitat Jaume I

**E. PORCU**

Universitat George August Göttingen

### Introducción

La estadística espacial reconoce y aprovecha la ubicación espacial de los datos a la hora de diseñar, recopilar, gestionar, analizar y mostrar las observaciones. Éstas son generalmente dependientes, si bien existen modelos espaciales a disposición del investigador que permiten tratar con dicha dependencia espacial a la hora de llevar a cabo labores de predicción. La estadística espacio-temporal incorpora, además, el tiempo y su interacción con el espacio como argumento de ayuda en tales labores predictivas.

Las mediciones y modelos espaciales y espacio-temporales están presentes, sorprendentemente, en una amplia variedad de disciplinas científicas. Los orígenes de la vida humana vinculan los estudios de la evolución de las galaxias, la

estructura de las células biológicas y los patrones de asentamiento arqueológicos. Los ecologistas estudian las interacciones entre plantas y animales. Silvicultores y agricultores necesitan investigar las variaciones que se producen en el terreno para sus experimentos. La estimación de las precipitaciones y de las reservas de oro y petróleo es de vital importancia económica. Estos son, entre otros, buenos ejemplos de la importancia del espacio (espacio-tiempo en su caso) en el mundo de la Ciencia.

En todo caso, la geología, la edafología, el tratamiento de imágenes, la epidemiología, la agronomía, la ecología, la silvicultura, la astronomía, el estudio de la atmósfera, la economía, o simplemente, cualquier disciplina que trabaje con datos espaciales recopilados de diferentes lugares y en distintos instantes temporales, necesita del desarrollo de modelos geoestadísticos que indiquen la estructura e intensidad de la dependencia espacio-temporal presente en los fenómenos que comprenden.

Sin embargo, el estudio de la variabilidad espacial, y sobre todo espacio-temporal, es una disciplina relativamente nueva en el marco de la Estadística, lo que explica la escasez de instrumentos de estadística espacial 30 años atrás. En los últimos 10 años ha habido una creciente toma de conciencia de esta necesidad, habiéndose realizado un gran esfuerzo por buscar herramientas adecuadas y útiles a tales efectos. Y todo ello porque utilizar modelos espaciales o espacio-temporales para caracterizar y explotar la dependencia espacial (o espacio-temporal) de un conjunto de observaciones tiene importantes ventajas: (i) Modelos más generales, ya que, en la mayoría de los casos, los modelos clásicos que no tienen en consideración la dimensión espacial o la interacción de las dimensiones espacial y temporal son un caso particular de un modelo espacial o espacio-temporal. (ii) Estimaciones más eficientes: de la tendencia, de los efectos de las variables explicativas, de promedios regionales,... (iii) Mejora de las predicciones: más eficientes, con propiedades de extrapolación más estables,... (iv) La variación espacial no explicada en la estructura de la media debe ser absorbida por la estructura del error, por lo que un modelo que incorpore la dependencia espacial puede decirse que está protegido frente a una mala especificación de este tipo. Esto, en muchos casos, tiene como resultado una simplificación en la especificación de la tendencia; en general, los modelos con dependencia espacial suelen tener una descripción más parsimoniosa (en ocasiones con muchos menos parámetros) que los clásicos modelos de superficie de tendencia.

Estas mejoras de la estadística espacial y espacio-temporal, junto con el fuerte y reciente desarrollo de los Sistemas de Información Geográfica o GIS (*Geographic Information System*), han propiciado que en la actualidad exista una importante motivación por la búsqueda de herramientas espaciales o espacio-temporales. En este último caso, dado que por el momento las necesidades computacionales resultan, en algunos casos, inabordables, existe un gran interés en la generación de procedimientos aproximativos y en el desarrollo de nuevas

tecnologías capaces de gestionar grandes volúmenes de datos. Pero de nada valdrían estos nuevos desarrollos sin solucionar el problema fundamental: la configuración de nuevos modelos covariográficos válidos que sean capaces de representar la dependencia espacio-temporal presente en los datos.

¿A qué nos referimos con el término “válidos”? En el marco de la predicción krigada, el cálculo de la inversa de la matriz de covarianzas, necesaria para la obtención del mejor predictor lineal e insesgado, se convierte en un problema crucial en geoestadística. Y es que un requisito indispensable para la inversión de la matriz de covarianzas es que sea definida positiva, por lo que el reto actual de la geoestadística es la obtención de funciones de covarianza espacio-temporales válidas.

Y es un reto porque en la actualidad, a pesar de los esfuerzos realizados en los últimos años por ciertos grupos de investigadores, el elenco de modelos teóricos covariográficos o variográficos válidos que permitan la adecuada solución de los sistemas de ecuaciones de krigado no es todo lo amplio que sería deseable. Por tanto, no resulta, en absoluto, extraño que la construcción de modelos covariográficos espacio-temporales (sobre todo no separables) sea una de las áreas de la geoestadística a la que más interés está prestando en la actualidad la comunidad científica. Ahora bien, este “vino nuevo”, criado en la frontera de la Ciencia Geoestadística, procede de cepas viejas ya que, curiosamente, su materia prima deriva de teoremas datados en la primera mitad del siglo pasado. Los teoremas Bernstein (1928), Bochner (1932), Shoenberg (1938) y Lévy-Khinchine (1949) son algunos ejemplos representativos de estas viejas cepas que tan buen vino están dando en las últimas cosechas del campo de la geoestadística.

Aunque ya existe un cierto nivel de investigación enmarcada en el ámbito de la geoestadística que trata sobre funciones de covarianza espacio-temporales, cada autor expone el instrumental matemático necesario para llegar al modelo que propone, de tal forma que dicho instrumental parece estar en una caja de herramientas formada por compartimentos estancos. Sin embargo, dicho instrumental tiene una característica común: su recurso a célebres teoremas de primeros del siglo XX, y no hay ningún trabajo, hasta donde llega el conocimiento de los autores, que aborde, de manera compacta e integral, las relaciones entre dichos teoremas y las más novedosas funciones de covarianza del siglo XXI. Y este es el objeto del presente trabajo.

Tras esta introducción, el artículo se organiza de la siguiente manera: la Sección II se divide en dos partes. La primera muestra una rápida exposición de los orígenes de la Geoestadística, justificando la importancia de la modelización de la función de covarianza y presentado el desarrollo evolutivo de dichos modelos. La segunda parte contiene una simple descripción de conceptos básicos para la mejor comprensión del artículo. La Sección III proporciona la forma de definir nuevas funciones de covarianza espacio-temporales utilizando teoremas matemáticos

clásicos. Por último, la Sección IV recoge las principales conclusiones de este trabajo.

## **Covarianza espacio-temporal: piedra angular de la geoestadística moderna**

### **1. Geoestadística: del variograma a las covarianzas cuasi-aritméticas.**

Uno de los problemas iniciales más importantes de la geoestadística fue la predicción de la riqueza de un bloque minero a partir de una muestra observada. A este proceso Matheron (1963) lo denominó kriging. Kriging es un término que viene a ser sinónimo de predicción espacial óptima. La teoría que lo estudia se dedica al análisis y resolución de los problemas derivados de la predicción espacial de las variables que dependen de la localización donde son observadas. Sus orígenes se sitúan en torno a los años cuarenta en los campos de oro del Sur de África, cuando se empieza a usar la media muestral de un conjunto de datos próximos para estimar la cantidad media de oro en un bloque de terreno. Estos estimadores eran utilizados para buscar oro de forma selectiva. Durante los años cincuenta, D. G. Krige proporcionó una buena discusión sobre cómo mejorar las primeras predicciones, dentro de un contexto minero. Sin embargo, la formulación del método de predicción óptima no proviene de los trabajos de Krige. Las contribuciones dentro del campo de la estadística de Wold (1938), Kolmogorow (1941) y Wiener (1949) contienen ecuaciones de predicción lineal óptima que reflejan la noción de cómo utilizar observaciones próximas para generar una predicción puntual. Dentro de la física, en Teoría de turbulencias, Kolmogorov (1941) supuso la existencia de un variograma para caracterizar la estructura local de una turbulencia. Durante la Segunda Guerra Mundial, Wiener desarrolló unas ecuaciones de kriging (simple) similares a las de Kolmogorov dentro de un contexto temporal, teoría que sería publicada más tarde (1949). El propósito era predecir los movimientos de los aviones a partir de medidas tomadas con el radar. Thomson (1956) hizo una extensión de la aproximación de Wiener a una situación espacial. Lo que hoy conocemos como el método de kriging no apareció hasta las contribuciones de Matheron en los años 60. En un tratado de dos volúmenes de 504 páginas en francés, Matheron (1962; 1963) publicó su *Traité de Geostatistique Appliquée* (Volúmenes I y II, respectivamente), dando a la teoría de kriging una forma más comprensible y centrándose en los aspectos espaciales de los problemas de minería. En particular, el Volumen II (1963) trata enteramente la técnica del kriging, aunque hay algo de esta discusión en el Volumen I (1962; Cap:V III). En 1963 apareció una versión muy abreviada en inglés, en la que llama la atención el tratamiento del kriging para el caso particular en el que la dimensión es de orden dos. Fue aquí donde Matheron otorgó el honor a D. G. Krige de que el

procedimiento llevase su nombre, por sus contribuciones en el campo de la minería, al utilizar el término kriging para describir la predicción espacial óptima.

Mientras Matheron desarrollaba en Francia la teoría del kriging aplicada a la minería, el meteorólogo L. S. Gandin (1963) realizaba un trabajo extraordinariamente similar en la Unión Soviética. Su texto, *Obkektivnyĩ analiz meteorologicheskikh poleĩ*, de 238 páginas, traducido al inglés en 1965 bajo el título *Objective analysis of meteorological fields*, es notable por sus desarrollos en el tratamiento de predicción y diseño espacial, por su claridad de exposición y por la atractiva combinación de teoría y aplicaciones.

La original y simultánea contribución de estos autores fue la de expresar las predicciones lineales óptimas, en un contexto espacial, en términos del variograma. Gandin usó una terminología diferente; El nombre que Gandin le dio a esta aproximación fue *análisis objetivo*. Así, por ejemplo, al método de kriging simple lo denomina interpolación óptima y al de kriging ordinario lo llama interpolación óptima con ponderadores normalizados.

Originariamente, la teoría del kriging fue desarrollada para ser aplicada en las Ciencias de la Tierra, en particular en el campo de la minería, dando lugar a una nueva rama denominada Geoestadística. Posteriormente, debido al carácter general de esta metodología, el ámbito de aplicación se ha extendido considerablemente a otros campos de la ciencia: análisis de imágenes, ecología, economía, agricultura, astronomía, climatología, geografía, etc., como se ha mencionado anteriormente.

En los últimos años la geoestadística ha incorporado el tiempo como instrumento de predicción. Por ello la demanda de modelos covariográficos que describan la evolución de procesos en el espacio y en el tiempo ha sido muy considerable. En particular, hay una clara necesidad de modelos que capturen el comportamiento espacial y temporal de forma simultánea. La consideración de ambos elementos por separado nos llevaría a una pérdida de información importante. En este contexto, es la geoestadística espacio-temporal la que nos ofrece los instrumentos adecuados de análisis estadístico.

Como es sabido, los procedimientos de kriging basados en interpolación dependen exclusivamente de la elección de la estructura de autocovarianza asociada al campo aleatorio espacio-temporal. Por tanto, el objetivo primordial de la geoestadística es obtener estructuras válidas de covarianzas espacio-temporales que consideren las dependencias e interacciones entre el espacio y el tiempo. En otras palabras, lo que se necesita son modelos de covarianzas espacio-temporales no separables asociados tanto a campos aleatorios estacionarios como no estacionarios. Este ha sido y es el reto para la comunidad estadística en los últimos 10 años.

A modo de introducción, y antes de proceder a la exposición de los modelos de covarianza convencionales y de nueva generación, las primeras aproximaciones a

la modelización de la dependencia espacio-temporal a través de funciones de covarianza no fueron sino meras generalizaciones de los modelos estacionarios disponibles en el contexto espacial.

Así, en los primeros estudios era habitual modelizar la covarianza espacio-temporal mediante modelos métricos, esto es, definiendo una métrica en el espacio-tiempo que permitiese utilizar directamente los modelos isotrópicos válidos en el caso espacial (véase, por ejemplo, el trabajo pionero de Dimitrakopoulos y Luo, 1994). Estos modelos métricos se caracterizan por ser no separables, isotrópicos y estacionarios.

El siguiente paso en esta etapa inicial consistió en la configuración de funciones de covarianza espacio-temporales a través de la suma o el producto de una covarianza espacial y otra temporal, ambas estacionarias, dando lugar a modelos separables, isotrópicos y estacionarios. Posteriormente, ante las limitaciones de los dos procedimientos anteriormente expuestos a la hora de reflejar la dependencia espacio-temporal realmente existente en la inmensa mayoría de los fenómenos objeto de estudio, el interés pasó a centrarse en la inclusión en los modelos de covarianza de la interacción del espacio y el tiempo, presente en la mayor parte de tales fenómenos, dando lugar a los denominados modelos no separables (aún en el ámbito de isotropía y estacionariedad). Entre estos últimos destacan los desarrollados por Jones y Zhang (1997), Cressie y Huang (1999), Brown *et al.* (2000), De Cesare *et al.* (2001a,b, 2002), De Iaco *et al.* (2001, 2002a,b, 2003), Myers *et al.* (2002), Gneiting (2002), Ma (2002, 2003a,b, 2005a,b,c), Fernández-Casal *et al.* (2003) o Kolovos *et al.* (2004), Stein (2005), entre otros.

El desarrollo evolutivo continuó con la búsqueda de modelos espacio-temporales no separables espacialmente anisotrópicos y/o temporalmente asimétricos, como los descritos en Fernández-Casal *et al.* (2003), Stein (2005), Porcu *et al.* (2006) o Mateu *et al.* (2007a,b), entre otros.

Finalmente, se pueden citar algunas aproximaciones recientes al problema de la modelización de funciones de covarianza espacio-temporales, como las realizadas en Chen *et al.* (2006), que proponen una generalización espacio-temporal del procedimiento de construcción de funciones de covarianza espaciales no estacionarias a través de mixturas de procesos estacionarios localmente ortogonales (Fuentes y Smith, 2001; Fuentes, 2002). Porcu y Mateu (2007) muestran un procedimiento que permite la construcción de modelos no estacionarios utilizando funciones completamente monótonas. Mateu *et al.* 2007, proponen un procedimiento usado para el conjunto de procesos aleatorios isotrópicos que se exportará a un escenario de anisotropía en la componente espacial con isotropía en sus componentes. En particular, utilizan el operador *la Descente* actuando sobre una función de covarianza de una manera particular, que definido sobre un espacio  $d$ -dimensional es capaz de conducirnos a nuevas funciones de covarianza definidas

en espacios con mayores dimensiones. En Gregori *et al.* (2008) se introducen funciones de covarianza negativas muy útiles en ramas como la biología y la medicina. Porcu *et al.* (2009) han logrado notables avances con sus recientes desarrollos en el estudio de la dependencia espacio-temporal a través de promedios cuasi-aritméticos.

## 2. Conceptos básicos de funciones covariográficas espacio-temporales

Esta sección es meramente expositiva y lo que contiene es el instrumental básico relacionado con la definición de covarianza espacio-temporal, puesto que la principal dificultad del análisis de las funciones aleatorias espacio-temporales será seleccionar aquel modelo de función de covarianza que mejor se ajuste a las observaciones, entre aquellas que son válidas.

Sea un conjunto de duplas espacio-temporales denotadas por  $Z(\mathbf{s}, t)_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sea  $Z(\mathbf{s}, t)$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$  una función aleatoria espacio-temporal Gaussiana con media  $m(\mathbf{s}, t)$  y con varianza constante y finita. Entonces, la función

$$C_{st}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t_1, t_2)$$

definida en  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  se denomina *función de covarianza espacio-temporal* de la función aleatoria en cuestión y, si no se consideran nuevas hipótesis, depende únicamente de las coordenadas espacio-temporales  $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t_1, t_2)$ .

Es de sobra conocido que el requisito más importante para que una función  $C_{st}$  definida en  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sea función de covarianza asociada a un campo aleatorio espacio-temporal, es que sea *definida positiva*, esto es

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j C_{st}((\mathbf{s}_i, t_i), (\mathbf{s}_j, t_j)) \geq 0$$

para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , y para cualesquiera  $(\mathbf{s}_i, t_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  y  $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .

Bajo la suposición *estacionariedad de segundo orden*, se tiene que  $m(\mathbf{s}, t) = m$  independientemente de las coordenadas espacio-temporales, y la función de covarianza

$$\text{cov}(Z(\mathbf{s}_i, t_i), Z(\mathbf{s}_j, t_j)) = C_{st}(\mathbf{h}, u)$$

queda definida para  $(\mathbf{h}, u) = (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j, t_i - t_j) \hat{\Gamma}_i^{d'} \hat{\Gamma}_j$ . Por lo tanto, únicamente depende de la separación espacial y temporal,  $\mathbf{h} \hat{\Gamma}_i^d$  y  $u \hat{\Gamma}_j$  respectivamente.

La estacionariedad es sólo una de las hipótesis de simplificación que a menudo es necesaria para la estimación y modelización.

Una función de covarianza estacionaria es *separable* (Mitchell *et al*, 2005) si se puede expresar como

$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = \frac{C_{st}(\mathbf{h}, 0)C_{st}(\mathbf{0}, u)}{C_{st}(\mathbf{0}, 0)}, \quad " (\mathbf{h}, u) \hat{\Gamma}_i^{d'} \hat{\Gamma}_j .$$

En otras palabras, separabilidad significa que la estructura de covarianza espacio-temporal se puede descomponer en una función de covarianza puramente espacial  $C_s$  y otra función de covarianza puramente temporal  $C_t$ . Se dirá que no es separable en caso contrario.

Una función de covarianza estacionaria se denomina *completamente simétrica* si es espacialmente isotrópica y temporalmente simétrica, es decir, si

$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = \mathcal{C}_{st}^{\%}(\|\mathbf{h}\|, |u|),$$

con  $\mathbf{h} \hat{\Gamma}_i^d, u \hat{\Gamma}_j$  y donde el símbolo  $\|\mathbf{g}\|$  denota la norma Euclídea. Finalmente,  $\mathcal{C}_{st}^{\%}$  es una función definida positiva y representa a  $C_{st}$ . En este caso, siguiendo a Gneiting (2002), se tiene que:

$$C_{st}(\mathbf{h}, u) = C_{st}(\mathbf{h}, -u) = C_{st}(-\mathbf{h}, u) = C_{st}(-\mathbf{h}, -u).$$

Si una función de covarianza es separable entonces es completamente simétrica. El recíproco no es necesariamente cierto.

## De los teoremas del siglo XX a funciones de covarianza de nuestros días

En el contexto de la estadística espacial y espacio-temporal, el paso clave del procedimiento de predicción es la elección de la función (covariograma o semivariograma) que modeliza la estructura de dependencia espacial o espacio-temporal de los datos. No obstante, si bien en la tesisura espacial es el semivariograma la función usualmente elegida a estos efectos, en el marco espacio-temporal es la función de covarianza la herramienta habitualmente seleccionada. En la actualidad, la comunidad científica está haciendo grandes esfuerzos por encontrar herramientas que permitan la construcción de nuevos modelos de

funciones de covarianza válidos, sobre todo en el contexto espacio-temporal, capaces de representar las estructuras de dependencia que se dan en la realidad y que aborden retos hasta ahora no estudiados.

Al hacer referencia a un modelo espacio-temporal covariográfico válido, se está manifestando, implícitamente, que la función de covarianza debe ser definida positiva. Sin embargo, en el contexto espacio-temporal la disponibilidad de modelos válidos es, por el momento, escasa, y es por ello que su construcción es una de las principales actividades de investigación en geoestadística. Por otra parte, si ya resulta complicado demostrar que una función espacial o temporal es definida positiva, la complicación es aun mayor cuando se trata de determinar modelos de covarianzas espacio-temporales válidos. Esta dificultad es la que ha llevado a la disciplina geoestadística a recurrir a teoremas de célebres matemáticos de primeros del siglo XX para construir estas funciones covariográficas espacio-temporales válidas.

Recuérdese, que una función de covarianza,  $C: \mathbb{I}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , es definida positiva sí, y sólo sí, para una colección finita de puntos  $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{I}^d$  la matriz  $(C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j))_{i,j=1}^n$  es definida positiva, es decir,

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \sum_{i,j=1}^n a_i C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \bar{a}_j \geq 0.$$

Pero, como ya se avanzó, esta expresión no es trivial ni sencilla de demostrar, por lo que es necesario recurrir a otras herramientas más dúctiles que conduzcan al mismo resultado. Y es aquí donde se manifiesta la utilidad de una serie de prestigiosos teoremas del principios de 1900 que pasamos a enunciar.

El **Teorema de Bochner (1932)** establece una relación biunívoca entre una función continua definida positiva y la transformada de Fourier de una medida positiva y acotada. Es decir, una función  $C: \mathbb{I}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y definida positiva sí, y sólo sí, es la transformada de Fourier-Stieltjes de una medida acotada y positiva,  $F \in \mathbb{I}$ ,

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'x} dF(\omega) \quad \forall x \in \mathbb{I}.$$

Si además la función de distribución espectral  $F$  es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'x} dF(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'x} f(\omega) d(\omega) \quad \forall x \in \mathbb{I}.$$

Del teorema de Bochner se desprenden los dos siguientes corolarios. El primero permite ascender del dominio de los números reales al de los números complejos a través de la transformada de Fourier, y el segundo permite ascender del conjunto de los números naturales al de los números reales mediante la transformada de Laplace.

**Corolario 1:** Una función  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$  es continua y definida positiva sí, y sólo sí, es la transformada de Fourier de una medida finita positiva.

$$f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C} \quad d.p. \Leftrightarrow C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\langle \omega, x \rangle} dF(\omega).$$

**Corolario 2:** Una función  $f: [0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{C}$  es definida positiva y continua sí, y sólo sí, es la transformada de Laplace de una medida finita positiva.

$$f: [0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{C} \quad d.p. \Leftrightarrow C(x) = \int_0^{\infty} e^{-\langle \omega, x \rangle} dF(\omega)$$

No obstante, el interés de este corolario es meramente analítico por cuanto hace referencia a campos aleatorios definidos en el semi-hiperplano.

El **Teorema de Schoenberg (1932)** explica la posibilidad de construir funciones definidas positivas en espacios Euclídeos a través de funciones completamente monótonas ya que, una función  $\varphi(\|x\|^2)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  es definida positiva en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\forall d \in \mathbb{N}$  sí, y sólo sí,  $t \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{C}$  es completamente monótona<sup>1</sup>.

Un caso particular es la aplicación de este teorema a funciones de covarianza,  $C$ . Una función  $C$  es definida positiva en  $\mathbb{R}^d$  sí, y sólo sí,  $C$  es completamente monótona en el intervalo  $[0, \infty)$ .

El **Teorema de Bernstein (1928)** relaciona las funciones completamente monótonas con las transformadas de Laplace. Una función  $f$  es completamente monótona sí, y sólo sí, es la transformada de Laplace de una medida finita y acotada en  $[0, \infty)$ , es decir,

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\langle \omega, x \rangle} d\mu(\omega)$$

---

<sup>1</sup> Una función es completamente monótona sí  $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ , para  $x > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Y, por el teorema de Schoember (1932) una función es definida positiva sí, y sólo sí, es completamente monótona. Luego el teorema Bernstein, junto con el teorema de Schoember, establece una forma de obtener funciones definidas positivas.

El **Teorema de Lévy-Kintchine (1949)** establece que una función  $\varphi$  es función condicionalmente definida negativa (función semivariográfica) en sí, y sólo sí, es una *función de Bernstein*<sup>2</sup> en  $[0, \infty)$ . Luego por el teorema de Shoenberg, esta es otra vía para obtener una función definida positiva.

La **transformada de Hankel**, introducida inicialmente por Sneddon (1946), proporciona una forma de obtener funciones definidas positivas en una dimensión concreta. Dicha transformada establece que, dada una dimensión fija  $d$ ,  $\varphi$  es definida positiva en  $\mathbb{R}^d$  para cualquier entero  $d$  sí, y sólo sí,

$$\varphi(t) = \int_0^\infty J_{\frac{d-2}{2}}(tr) t^{\frac{d-2}{2}} d\mu(r)$$

donde  $J_\lambda$  es función de Bessel de primera especie<sup>3</sup>.

Otro grupo interesante de relaciones del tipo no “one to one correspondence” son los **critérios de Pólya (1943)** para funciones definidas positivas. Dichos criterios establecen que:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \varphi(0) = 1 \\ \bullet \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0 \\ \bullet \varphi \text{ decreciente y convexa en } [0, \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi \text{ es definida positiva en } \mathbb{R}^d .$$

En definitiva, como puede apreciarse, son las cepas viejas, o célebres teoremas de matemáticos de principios del siglo XX, los que están produciendo los mejores vinos, o nuevas funciones de covarianza espacio-temporales, del siglo XXI.

<sup>2</sup> Una función de Bernstein se define como una función cuya primera derivada es completamente monótona.

<sup>3</sup> La función de Bessel de primer orden,  $J_\lambda$ , se define como:

$$j_l(x) := \frac{J_l(x)}{x^l} = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+l+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k, \quad x \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}.$$

## Conclusiones

Uno de los retos fundamentales, si no el fundamental, de la geoestadística espacio-temporal moderna es la generación de funciones de covarianza válidas que representen la dependencia espacio-temporal presente en los fenómenos objeto de estudio y no generen problemas a la hora de resolver las ecuaciones de krigado que, a su vez, proporcionan las predicciones deseadas.

En otros términos, el objetivo primordial de la geoestadística espacio-temporal de nuestros días es la ampliación del edificio de las funciones de covarianza definidas positivas. Sin embargo, demostrar que una función es definida positiva, en el ámbito espacio-temporal puede considerarse una ardua tarea, y ésta es la razón por la que los principales investigadores en la materia están echando mano del instrumental matemático-estadístico a su alcance para generar dichas funciones. Pero la búsqueda de dicho instrumental no es sino una interesante excursión por la historia de la matemática y la probabilidad.

## Anexo

- Bochner, S. (1933). Monotone funktionen, Stiltjes integrale und harmonische analyse, *Mathematische Annalen*, 108, 378-410.

§ 8.

**Positiv-definite Funktionen.**

8. 1. Wir nennen eine Funktion  $f(x)$ , welche in allen Punkten unseres Raumes definiert ist, positiv-definit, falls sie:

1. beschränkt und stetig ist,
2. „hermitesch“ ist, d. h.

(8, 11) 
$$\overline{f(-x)} = f(x),$$

und

3. die folgende entscheidende Bedingung erfüllt: Für irgendwelche Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ( $m = 2, 3, 4, \dots$ ), und irgendwelche Zahlen  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$  ist

(8, 12) 
$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^m f(x_\mu - x_\nu) \varrho_\mu \bar{\varrho}_\nu \geq 0.$$

- Schoenberg, I. J. (1938). Metric spaces and positive definite functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44, 522–536.

**THEOREM 3.** *A function  $f(t)$  is completely monotone for  $t \geq 0$ , if and only if  $f(t^2)$  is positive definite in Hilbert space  $\mathfrak{H}$ . In symbols:  $f(t) \in \mathfrak{M}$  if and only if  $f(t^2) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H})$ .*

The elements  $g(t)$  of  $\mathfrak{P}(\mathfrak{H})$  and  $f(t)$  of  $\mathfrak{M}$  are therefore in a one-to-one correspondence expressed by the relation  $g(t) = f(t^2)$ , which is valid both ways.

- Pólya, G. (1949). Remarks on characteristic functions. Proceedings of the First Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley and Los Angeles.

**THEOREM 1.** *A function  $f(t)$ , defined for all real values of the variable  $t$ , has the following properties:*

(1.1)  $f(t)$  is real-valued and continuous,

(1.2)  $f(0) = 1$ ,

(1.3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ ,

(1.4)  $f(-t) = f(t)$ ,

(1.5)  $f(t)$  is convex for  $t > 0$ .<sup>3</sup>

## Bibliografía

- BERNSTEIN, S. N. (1928): "Sur les fonctions absolument monotones". *Acta Math*, 52, 1-66.
- BOCHNER, S. (1933): "Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse". *Mathematische Annalen*, 108(1), 378-410.
- CHEN, L., FUENTES, M. y DAVIS, J. M. (2006): "Spatial temporal statistical modelling and prediction of environmental processes". En J.S. Clark and A. Gelfand (Eds.), *Hierarchical Modelling for the Environmental Sciences*, 121-144, Oxford Univ. Press.
- CHRISTAKOS, G. (2000): *Modern Spatiotemporal Geostatistics*. Oxford University Press, Oxford.
- (2002): "On a deductive logic-based spatiotemporal random field theory". *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 66, 54-65.
- CRESSIE, N. A. C. y HUANG, C. (1999): "Classes of Nonseparable, Spatiotemporal Stationary Covariance Functions". *Journal of the American Statistical Association*, 94, 1330-1340.
- DE CESARE, L., MYERS, D. E. y POSA, D. (2000): "Product-sum covariance for space-time modeling: an environmental application". *Environmetrics*, 12, 11-23.

- DE IACO, S., MYERS, D. E. y POSA, D. (2001): "Space-time analysis using a general product-sum model". *Statistics and Probability Letters*, 52, 21-28.
- (2002a): "Space-time variograms and a functional form for total air pollution measurements". *Computational Statistics and Data Analysis*, 41, 311-328,
  - (2002b): "Nonseparable space-time covariance models: some parametric families". *Mathematical Geology*, 34, 23-42.
  - (2003): "The linear coregionalization model and the product-sum space-time variogram". *Mathematical Geology*, 35, 25-38.
- DIMITRAKOPOULOS, R. y LUO, X. (1994): "Spatiotemporal Modeling: Covariances and Ordinary Kriging System". *Geostatistics for the Next Century*, R. Dimitrakopoulos (Ed.) Kluwer Academic Publisher, 88-93.
- FERNÁNDEZ-CASAL, R., GONZÁLEZ-MANTEIGA, W. y FEBRERO-BANDE, M. (2003): "Flexible spatio-temporal stationary variogram models". *Statistics and Computing*, 13, 127-136.
- FUENTES, M. (2002): "Spectral methods for nonstationary spatial processes". *Biometrika*, 89, 197-210.
- GANDIN, L. S. (1963): *Obkektivnyi analiz meteorologicheskikh polei*. Gidrometeoizdat: Leningrad. Translation (*Optimal interpolation of meteorological fields*) by the Israel Program for Scientific Translations: Jerusalem (1965).
- GNEITING, T. (2002): "Nonseparable Stationary covariance functions for space-time data". *Journal of the American Statistical Association*, 97, 590-600.
- (2002): "Compactly supported correlation functions". *Journal of Multivariate Analysis*, 83, 493-508.
- GNEITING, T., GENTON, M. G. y GUTTORP, P. (2005): "Geostatistical space-time models, stationarity, separability, and full symmetry". *Technical Report*, 475, University of Washington.
- GREGORI, P., PORCU, E., MATEU, J. y SASVÁRI, Z. (2007): "On potentially negative space time covariances obtained as sum of products of marginal ones". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 60, 865-882.
- JONES, R. y ZHANG, Y. (1997): "Models for continuous stationary space-time processes". En *Modelling Longitudinal and Spatially Correlated Data*, Lecture Notes in Statistics, 122, 289-298.
- KOLOVOS, A., CHRISTAKOS, G., HRISTOPULOS, D. T. y SERRE, M. L. (2004): "Methods for generating non-separable spatiotemporal covariance models with potential environmental applications". *Advances in Water Resources*, 27, 815-830.
- KYRIAKIDIS, P. C. y JOURNEL, A. G. (1999): "Geostatistical space-time models: A review". *Mathematical Geology*, 31, 651-684.
- LU, N. y ZIMMERMAN, D. L. (2005): "Testing for directional symmetry in spatial dependence using the periodogram". *Journal of Statistical Planning and Inference*, 129 (1-2), 369-385.

- MA, C. (2002): "Spatio-temporal covariance functions generated by mixtures". *Mathematical Geology*, 34, 965-974.
- (2002): "Families of spatio-temporal stationary covariance models". *Journal of Statistical Planning and Inference*, 116, 489-501.
  - (2005): "Spatio-temporal variograms and covariance models". *Advances in Applied Probability*, 37(3), 706-725.
  - (2005): "Linear combinations of spatio-temporal covariance functions and variograms". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(3), 857-864.
- MATÉRN, B. (1960): "Spatial variation: Stochastic models and their application to some problems in forest surveys and other sampling investigations". *Meddelanden Fran Statens Skogsforskningsinstitut*, 49 (5), Stockholm.
- (1986): *Spatial Variation. Lecture Notes in Statistics*, 36, Springer, New York.
- MATEU, J. y PORCU, E. (eds.) (2008): *Positive Definite Functions: from Schoenberg to Space-Time Challenges*. Editorial Universitat Jaume I. Department of Mathematics.
- MATEU, J., PORCU, E., MONTERO, J. y FERNÁNDEZ-AVILÉS, G. (2009): "Environmental problems: modelling space-time data". En Ferrari, G., Montero, J. M., Mondejar, M., Vargas, M. (eds): *Impacto Ambiental de las Actividades Económicas*. Septem Ediciones, Oviedo.
- MATHERON, G. (1962): *Traité de Géostatistique Appliquée*, Tome I, Mémoires du Bureau de Recherches Géologiques et Minières, 14. Editions Technip, Paris.
- (1963): *Traité de Géostatistique Appliquée*, Tome II. Le Krigéage, Mémoires du Bureau de Recherches Géologiques et Minières, 14. Editions Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Paris.
  - (1963b): "Principles of geostatistics". *Economic Geography*, 58, 1246-1266.
  - (1965): *Les variables régionalisées et leur estimation: une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature*, Masson, Paris.
- MITCHELL, M. W., GENTON, M. G. y GUMPERTZ, M. L. (2005): "Testing for separability of space-time covariances". *Environmetrics*, 16 (8), 819-831.
- (2006): "A likelihood ratio test for separability of covariances". *Journal of Multivariate Analysis*, 97, 1025-1043.
- PÓLYA, G. (1949): "Remarks on characteristic functions". *Proceedings of the First Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley and Los Angeles.
- PORCU, E., GREGORI, P. y MATEU, J. (2006): "Nonseparable stationary anisotropic space-time covariance functions". *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 21 (2), 113-122.
- PORCU, E., SHILLING, R. (2008): *From Schoenberg to Pick-Nevanlinna: towards a complete picture of the variogram class*. Submitted.

- PORCU, E., MATEU, J. y CHRISTAKOS, G. (2009): "Quasi-arithmetic means of covariance functions with potential applications to space-time data". *Technical Report*, 107, Universitat Jaume I. Submitted to *Bernoulli*.
- ROUHANI, S. y HALL, T. J. (1989): "Space-time Kriging of Groundwater Data". *Geo statistics*, 2 (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht), 639-651.
- SAMPSON, P. D. y GUTTORP, P. (1992): "Nonparametric Estimation of Nonstationary Spatial Covariance Structures". *Journal of the American Statistical Association*, 87, 108-119.
- SCHOENBERG, I. J. (1938): "Metric spaces and completely monotone functions". *Annals of Mathematics* 39, 811-841.
- (1938): "Metric spaces and positive definite functions". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44, 522-536.
- STEIN, M. L. (1999): *Interpolation of Spatial Data. Some Theory of Kriging*, Springer-Verlag, New York.
- (2005): "Space-time covariance functions". *Journal of the American Statistical Association*, 100, 310-321.
- WIDDER, D. V. (1941): *The Laplace Transform*. Princeton University Press, Princeton.
- ZASTAVNYI, V. P., PORCU, E. (2009): *Compactly supported space-time covariance functions*. Submitted.

## CAPÍTULO 12

# Consumer Price Indexes (CPIs) in Time and Space: an Historical-Systematic Overview

GUIDO FERRARI  
Università di Firenze  
Renmin University of China

### Introduction

The idea of elaborating an index for the inflation measurement dates back to the birth of macroeconomics. But it puts its roots even earlier, in the price revolution which took place in the second half of the XVI<sup>th</sup> century in Europe.

After the first attempts to measure inflation intended as the increasing of the general level of prices, and the subsequent debate that flamed the social sciences researchers, namely economists and statisticians, the attention shifted on the measurement of the Consumption Price movements, that is, on the increasing of the prices of the households consumption basket.

Parallel to this and with the aim of solving the statistical problems linked to the above measurement, a number of statisticians and economists devoted themselves to propose nearly an infinite number of indexes, basically in the so-called

“statistical approach”, but also in the “economic approach” (to refer to the classification first suggested by Ragnar Frisch in the first half of the XX<sup>th</sup> century).

One of the most famous, and by far the most widely used, is the Laspeyres formula, an index belonging to the first class, introduced in the 1870s (for an exhaustive review of the Laspeyres formula characteristics, see Turvey, 2004).

Thus, to simplify/summarize, households’ consumption prices variations measured by Laspeyres price index formula: that’s the birth of the Consumer Price Index (CPI).

All the above is too known to claim additional words and attention in this paper and has been reminded for the sake of setting up the frame of our discussion of the history of the CPI as the inflation measurement tool, both in time and space.

All at once, CPI has been used also as a deflation instrument, specially to express some National Accounts (NA) aggregates at constant prices, also being used in the Gross Domestic Product (GDP) deflation for the part concerning Consumption.

Any discussion, activity, progress was made and achieved in the time domain, as the inflation and deflation procedures were undertaken as regards the problems that arose in a time perspective.

Later on, the need of making GDP and related aggregates international comparisons brought to the stage the perception of the need of a tool for measuring the price level differences in space, that’s the spatial inflation, and the concerned tool, i.e., the Purchasing Power Parity (PPP), was invented.

Due to the above need for international comparisons, independent on the path followed by the CPI in time and apparently disregarding it, the two fields, that is, time and space inflation measurements, have proceeded independently and as if they were two different domains and not two horns of the same, dual, problem.

The purpose of this paper is just to retrace the history of the CPI as a time/space inflation/deflation tool in the light of a unifying guiding line.

To do this, we will discuss first the genesis and the story of the CPI in time, from now on denoted as TCPI and subsequently, the genesis and story of the space CPI, here indicated by SCPI or, definitely, by PPP.

More specifically, in Paragraph 2 we will analyse the history of the TCPI, in its technical aspects as a Laspeyres index, therefore regarded from the point of view of the statistical approach, both deterministic and stochastic, also extended to the economic approach, as well as with regards to the practical problems of construction faced by the international concerned institutions and National Statistical Offices (NSOs).

In Paragraph 3 an excursion to the development of the TCPI in Italy from its birth to to-day, with the necessary references to the parallel path in the EU and an eye to the US will be performed. The focus is on Italy as we are interested, in the framework of the general historical development, to the case of Italy, which on the other hand has provided valuable contributions to the overall debate.

Paragraph 4 will treat the PPP birth, development and current situation, starting from the discussion of the international comparisons of GDP and will be necessarily innervated in the project for international comparisons which embodies any spatial price indexes.

Paragraph 5 will conclude the paper with an overall critical evaluation of the historical and current situation of the TCPIs and the PPPs in the light of the duality of the two domains and with some proposals for future work.

## **The TCPI: methodological features and historical path**

D) Many formulas have been proposed to measure households' price movements, and therefore, as said above, inflation-deflation, and the choice of one of them to be used as the index that measures the rate at which the prices of consumption goods and services are changing from month to month (or from quarter to quarter), that's, as the TCPI, was a problem since the beginning.

Indeed, a TCPI measures the rate of price inflation as experienced or perceived by households in their role as consumers. As said above, this inflation is assumed to be the inflation of the economy as a whole.

Since their birth, besides being extensively used as inflation measurement tool, in many countries CPIs were compiled mainly in order to be able to adjust wages to compensate for the lost of purchasing power caused by inflation (Astin, 1999; Turvey, 2004).

Subsequently, it has become a key statistics for purposes of economic policy-making, especially monetary policy. It is often specified in legislation and in a wide variety of private contracts as the appropriate measure of inflation for the purposes of adjusting payments (such as wages, rents, interest and social security benefits) for the effects of inflation. It can therefore have substantial and wide-ranging financial implications for governments and businesses, as well as for households.

After discussion and debate, in some respects still alive, the choice of the formula to be used as the TCPI felt on the Laspeyres (fixed base) formula

$$\sum_{h=1}^k \frac{p_{t,h}}{p_{0,h}} w_{0,h}, \text{ where } p \text{ denotes prices and } q \text{ quantities (volumes), with}$$

$w_{0,h} = \frac{p_{0,h}q_{0,h}}{\sum_{h=1}^k p_{0,h}q_{0,h}}$ , which is now the one used, both by the NSOs and the

concerned international institutions and organisms.

In the choice of the formula for the TCPI a fundamental role has been plaid by the circumstance that the Lapeyres one is quasi-transitive. In fact,

$\frac{I_{0,t}^L}{I_{0,t-1}^L} = \frac{\sum_{h=1}^k p_{t,h}q_{0,h}}{\sum_{h=1}^k p_{t-1,h}q_{0,h}}$ , that is an index which quasi-provides the information

required from the ratio of the two indexes, i.e., the price variation between  $t-1$  and  $t$  but of a basket of time  $0$  and not of time  $t-1$ .

This feature is so important for practical uses to obscure any other characteristics or tests passed by an index.

Indeed, there is a need of getting short-term information, i.e., monthly inflation, that is price level difference between the end of a month and the beginning of the same month and/or medium-period inflation, or medium-term inflation, i.e., yearly or trend inflation, that is the price level difference between the end of a month of a given year and the end of the same month of the previous year.

This need, that in other words, consists of transforming a fixed base price indexes series into a moving one, beats any other need and can be satisfied if the Laspeyres formula is used only. And, thanks to the above quasi-transitivity, this need is fulfilled just by making the ratio between the TCPI of a month and the TCPI of the previous month or between the TCPI of a month of a given year and the TCPI of the same month of the previous year.

This quasi-transitivity of Laspeyres formula does not unfortunately make it a good candidate for the SCPI, as we will see later on.

It is not by chance that the formula specification implies time, as expressed by the two moments  $t$  and  $0$ . In fact, since the beginning of the story and for long time afterwards, the acronym CPI was a synonymous of TCPI.

Merits and shortcomings of this index are well known to discuss them here, if not in the perspective of the historical-systematic analysis we aim at performing.

In this respect, it should be stressed that both the parts of its structure, namely the price ratios  $\frac{P_{t,h}}{P_{0,h}}$  and the weighting system  $\frac{P_{0,h}q_{0,h}}{\sum_{h=1}^k P_{0,h}q_{0,h}}$  are crucial and exhibit

problems of identification, elaboration and implementation.

The price ratios  $\frac{P_{t,h}}{P_{0,h}}$  are obtained through what we could call, with a good deal of boldness, a two stage, non probabilistic sample of shops or retail outlets and consumption items.

Indeed, this is by far the most commonly shared procedure all over the world and, as occurs in the EU countries, the selling points are selected by means of a non random sample which accounts for the most represented kinds of shops. Actually, shops, stores, department stores, supermarkets, hypermarkets, are selected in number proportionally to their weight in the population. The goods and services to be priced are chosen in the same way, by selecting them through a non random sample usually proportionally to their importance in the household consumption basket, i.e., by selecting the most sold ones.

The weights  $\frac{P_{0,h}q_{0,h}}{\sum_{h=1}^k P_{0,h}q_{0,h}}$  are taken from Households Budget Surveys (HBSs),

in most cases integrated by NA data on consumption.

Indeed, the above considerations represent also the new (old) frontiers and challenges of the TCPI, just due to the utilization of the Laspeyres formula: chaining, in order to avoid as much as possible the substitution effect, methods for dealing with the modifications of quality of goods and services and tastes, search for the best basket composition both in number of goods and services and in kind, most suitable weighting structure.

**II)** By early XX<sup>th</sup> century, a debate on TCPI started, which lasted until now. Although some of them not entirely focussed on TCPI, but, instead, extended to general price indexes problems and to the Cost of Living Index (COLI) - a concept introduced early in the XX<sup>th</sup> century – it is worth mentioning: Bowley (1919, 1928), Edgeworth (1922), Divisia (1925), Frisch (1936), Tornqvist (1936/1937), Theil (1960, 1968, 1973), Khamis (1961, 1970, 1977). All the above authors, and not only them, gave, in a direction or another a substantial contribution to the progress of the subject.

Many Italians were in the debate: the work by Gini (1924), (1930), Tenderini (1934), Parenti (1940), Uggè (1941), Predetti (1976), Biggeri (1984) greatly

contributed to its development and success, also providing a valuable help to the work of the Italian National Statistical Office (Istat) in CPI elaboration. Moreover, under the auspices of Eurostat and the Department of Statistics of the University of Florence, an International Conference on Price Index Numbers was held in Florence in 1996 on “Improving the Quality of Price Indices”.

**III)** With the aim of overcoming the difficulties encompassed in the TCPI, mainly the impossibility to catch the goods and services substitution effect in time and the price relative modifications and quality changes, Konus in 1939, in the frame of the discussions on the subject initiated by Lerner (1935), Stahele, Joseph and Lerner (1935), Allen (1935), and Frisch (1938), proposed the so called “true COLI” based on consumer behaviour theory and the utility approach, which gave life to the so-called Konus-Laspeyres type indexes. This is the above mentioned “economic approach”.

After the II World War, the topic was deeply investigated and discussed by a number of scholars and many research papers have been produced in its framework, with several proposals of adoption for national consumer price indexes production.

Among them, and just to quote some of the many scientists who devoted to the advancement of the matter, Klein and Rubin (1947), Allen (1949), Konus himself again (Konus, 1958), Afriat (1967), Fisher and Shell (1972), Blackorby and Russel (1978), Blackorby, Primont and Russel (1978), Balk (1981) gave a valuable contribution.

In Italy, there was a flourishing of papers, some proposing new utility based consumer price indexes: Castellano (1963), Benedetti (1967, 1969, 1972), Frosini (1969), Leoni (1967), Ciripicchi Meloni (1975), Cavalli and Lemmi (1984), Ferrari and Gori (1984).

Nevertheless, and in spite of its nature of economic theory based one, this index has not been introduced by none of the very important NSOs, both due to the many statistical difficulties in collecting suitable datasets, as well as to some econometric problems that weaken its concrete utilization, and to the fact that it belongs to the COLI family.

**IV)** Parallel to the development of the economic approach, above all thanks to the studies by Afriat (1969, 1970), Diewert (1974, 1976, 1978), Sato (1974, 1976), and Vartia (1976) the class of exact and superlative price index numbers, including TCPI, was introduced.

**V)** A further research stream consolidated in the meantime, named “axiomatic approach”, basically thanks to the work by Eichhorn and Voeller (1973, 1976a, 1976b, 1990), Diewert (1992) and Balk (1995). In Italy, this approach was deeply investigated by Martini (1992a, 1992b).

**VI)** All the above research activity stimulated a series of research paper aimed at comparing the TCPI and the economic TCPIs, initiated with the paper by Allen (1935) and continued, among the many, by Afriat (1969).

**VII)** The need for attaching to the TCPI figures some significant statement led to the introduction of the “stochastic approach” which allows to set up confidence intervals for the estimates.

Probably, the first researcher who dealt with the question (actually, at our knowledge, there is no evidence before him of the use of probability) has been Edgeworth in 1925. Later on, Banerjee (1956, 1959), Adelman (1958), Wilkerson (1960, 1964, 1967), Johnson (1975), Mc Allister and Wang (1978), Basu (1980), have treated the accuracy of regression based COLI as well as the sampling error in TCPI. In several respects and by and large, Theil (1960, 1968, 1973) contributed to the development of the stochastic approach as well and inspired the papers by Clements and Izan (1981) on the stochastic approach in inflation measurement and, what is remarkable indeed, with his paper co-authored by Kloek (Kloek and Theil, 1965), opened the way to the extension of the approach to the space domain, performed by what we can call “the Australian school” of which Prasada Rao is a prominent exponent (Selvanathan and Prasada Rao, 1984, Prasada Rao, Doran and Selvanathan, 2002). Also, quite recently, Feenstra and Reinsdorf (2002) have investigated the situation when both prices and tastes are treated as stochastic, as stimulated by the economic approach, by deriving standard errors for a price index number.

The question of using probability sampling, with reference to TCPIs, has been raised by the fact that price collection with non-probability techniques would lead to some kind of cut-off selection in which a large part of the population (usually those with the lowest expenditures) is deliberately left unobserved and to obviously biased TCPIs and by the desire of getting better results in terms of the mean square error. De Haan, Opperdoes and Schut (1999), the fuglemen of this stream of thought, have considered simple random sampling, stratified sampling and systematic sampling proportional to expenditure and used Monte Carlo simulations using scanner data on selected goods to assess the performance of the sampling designs; surprisingly enough, cut-off selection was shown to be a successful strategy for item sampling in TCPI.

**VIII)** As stressed at point 2.2, not all the topics treated and the authors quoted at points 2.2 through 2.7, although we have referred the discussion to TCPI, have dealt with TCPIs strictly. Some of them have worked on price indexes, COLIs and TCPIs, sometimes overlapping considerations and results, often without specifications, making their statements and results valid for the generality. But they are important at all for the discussion and to the better understanding of the TCPI story.

A now quite old, as it refers to the situation existing some 25 years ago, bibliography on price index numbers (thus, not only TCPIs) can be found in Biggeri, Ferrari, Marliani and Piqué (1984).

**IX)** In order to deeper investigate TCPI characteristics, the United States (US) Senate in 1995 appointed the Boskin Commission, formally called the "Advisory Commission to Study the Consumer Price Index", to study possible bias in the computation of the TCPI as a measure of inflation. Its final report, titled "Toward A More Accurate Measure of the Cost of Living" and issued on December 4, 1996, concluded that the TCPI overstated US inflation by about 1.1 percentage points per year in 1996 and about 1.3 percentage points prior to 1996.

The report was important because inflation, as calculated by the Bureau of Labor Statistics (BLS), is used in the US to index the annual payment increases in Social Security and other retirement and compensation programs. This implied that the federal budget had increased by more than it should have, and that projections of future budget deficits were too large.

Clearer insights have recently been obtained on the relative strengths and weaknesses of the various formulae and methods used for inflation/deflation measurement; moreover, recent advances in communication and information technology have affected TCPI methods (Turvey, 2004).

In spite of the above remarks and some negative evidence, Laspeyres formula is indeed the paradigm still used to process the basic price data collected practically all over the world.

This has been codified through proposals by several organisms and bodies all converging to the goal of putting commonly used rules and methodologies.

The first international standards for TCPIs were promulgated in 1925 by the Second International Conference of Labour Statisticians (ICLS), although the first set of standards referred to COLIs rather than to TCPIs.

Since a TCPI can be defined also as measuring the change in the cost of purchasing a household's basket of consumption goods and services, whereas a COLI is defined as measuring the change in the cost of maintaining a given standard of living, or level of utility, the tenth ICLS in 1962 decided to adopt the more general term CPI, which should be understood to embrace both concepts.

The international standards have been revised three times, in 1947, 1962 and 1987. The 1987 standards were followed in 1989 by an International Labour Office (ILO) Manual of methods (Turvey, 1989).

A few years after the publication of the above Manual, it became clear that a number of outstanding and controversial methodological problems needed further investigation and analysis.

The United Nations Statistical Commission (UNSC), formerly United Nations Statistical Division (UNSD), formed an expert group consisting of specialists in price indexes from NSOs, international organizations, and universities from around the world, as one of the city groups established to address selected problems in statistical methods, i.e. to particularly, although not exclusively, exchange reciprocal experiences and thoughts on crucial problems of measuring price changes in the area of TCPIs.

The Group's strength is based on its professional authority, independence, and usefulness to national and international statistical agencies. The Group meets about every 18 months and, since it met for the first time in Ottawa in 1994, it became known as the "Ottawa Group". During the course of seven meetings of the Ottawa Group between 1994 and 2003, over 100 research papers on the theory and practice of TCPIs were presented and discussed.

The need to revise, update and expand the 1989 ILO Manual was gradually recognized and accepted during the 1990s. A formal recommendation to revise the Manual was made at the joint UNECE/ILO Meeting on TCPIs held in Geneva at the end of 1997. Responsibility for the revision was entrusted to the main international organizations interested in the measurement of inflation. This strategy was endorsed in 1998 by the UNSC, which also agreed to the conversion of the Ottawa Group into a formal Inter-secretariat Working Group on Price Statistics (IWGPS). The Sixteenth ICLS meeting in 1998 also recommended that the Fourteenth ICLS resolution concerning TCPIs, adopted in 1987, should be revised.

Indeed, the ILO, the International Monetary Fund (IMF), the Organization for Economic Co-operation and Development (OECD), the Statistical Office of the European Communities (Eurostat), the United Nations Economic Committee for Europe (UNECE), and the World Bank (WB), together with a number of NSOs and universities have collaborated since 1998 on developing the revised version of the 1989 Manual on TCPI in order to provide principles, recommendations and guidelines as regards conceptual and practical problems such as sample design, choice of index formula, adjustment of prices for quality changes, and the treatment of new products to NSOs and statistical international agencies for the compilation of their TCPIs.

The preparation of the draft revised resolution was discussed at the Seventeenth ICLS in November-December 2003 and was carried out by the ILO Bureau of Statistics in parallel with the actual preparation of the revised Manual that was published in 2004, cared of Turvey.

All we have discussed above regards the theoretical-practical aspects of the consumer price indexes in time domain and the related suggestions, refinements, improvements and disagreements. As far as the actual production of price index numbers for the time inflation measurement, the international organisms and institutions and the NSOs have continued to produce and use the TCPI.

## **The elaboration of the TCPI in Italy and in the EU, with a look to the US**

**D)** The story of the TCPI construction in Italy dates back to early XX<sup>th</sup> century. Actually, the birth of a sort of CPI can be put at 1914, when some municipalities started elaborating local consumer price index numbers.

Later on, in 1927, the newly constituted Italian NSO, named “Istituto Centrale di Statistica”, Istat, was charged to elaborate “Numeri indici del costo della vita in alcune città e capoluoghi di provincia del regno”, a COLI type index for selected important cities to substitute the local consumer price indexes. The index’s base was 1<sup>st</sup> June 1927=100 in some cities and 1928=100 in others (Istat, 1930, Ventura, 2009).

Since 1932, a distinction was introduced for “Foods” and the base was put 1914=100.

Since 1933, besides the 1914 base, also post I World War bases were put, namely 1919, 1920, 1921.

This index remained nearly unchanged until 1947, when it has been revised and national indexes were elaborated for 5 categories of goods and services (food, clothing, electricity and energy, housing and others) and for cities chief towns of provinces with more than 50,000 inhabitants, and its base put at 1938.

Since 1951 this COLI was elaborated also at a regional level. Meanwhile, and following a stream shared by the majority of countries belonging to the main international organizations, such as ILO, OECD, UNSC, CEE, the Italian NSO, which name was meanwhile changed into “Istituto Nazionale di Statistica”, preserving the same acronym Istat as before, started a comprehensive activity on price index which led to the elaboration, from November 1957, of the “Indice dei prezzi al consumo”, base at 1953, related to the prices of 267 goods and services purchased by the whole Italian population, a global TCPI, later on extended in basket, renamed, for completeness “Indice dei prezzi al consumo per l’intera collettività nazionale”, and indicated with the acronym NIC. It was detailed in 10 groups, 37 categories and 69 consumption products and services (Istat, 1957).

Thus, in this period, there were one TCPI and one COLI in Italy.

Starting from January 1964, the COLI concerned a type household with head of the family being a non-agricultural dependent worker (either blue or white collar), wife and two sons aged above 17 and was based 1961.

Since January 1967, both the TCPI and the COLI were at base 1966.

From March 1968 on, the COLI, in order to avoid misinterpretation, as actually it was not a true COLI, and also to implement the 1962 ICLS decision, was renamed “Indice dei prezzi al consumo per le famiglie di operai ed impiegati non

agricoli” (FOI), which, looking at it with today’s eyes, can be regarded by and large as a sub-index of the NIC.

Since 1992, both the NIC and the FOI are elaborated both with and without tobacco.

Since 1997, Istat elaborates the “Indice armonizzato dei prezzi al consumo” (IPCA), that is, the Harmonized Index of Consumer Prices (HICP), an EU TCPI we will discuss a few lines below.

Thus, Istat current surveys on consumer prices form a system of indexes constituted by the above three TCPIs.

These three TCPIs have in common the following elements: the price survey, the methodology of elaboration, the territorial base (since 2008, 84 communes with a coverage in terms of resident population accounting for 87.9%), the classification of the basket according to 12 expenditure sectors.

They differ as regards some specific aspects: the NIC and the FOI are based on the same basket but the weight given to each good and service is different in the two indexes, according to the relevance that the different goods and services keep in the consumptions of the concerned population. The HICP shares with the NIC the concerned population, but differs from the NIC and the FOI in basket, much smaller, and as it refers to the household final monetary consumption expenditure, except, for instance, lotteries, lotto and pool games. Moreover, the FOI and NIC always consider the selling price, whereas the HICP refers to the price actually paid by the consumer.

Starting from January 1999, the above system has been deeply innovated with the aim of ameliorating the quality of the information. The product elementary indexes are calculated as geometric means and the NIC and FOI, following the practice set up by Sweden, UK and France first, are yearly chained with calculation base referred to December of the previous year (Istat 2009).

**II)** It is worth noting that, since 1951 and up to 1998, under the pressure of social and economic turmoil in private blue collars working sectors due to the loss of purchasing power of their salaries, an agreement between trade unions and the entrepreneurs confederation gave life to the so called “trade union index”, a base 1951 TCPI intended to measure the variations of the cost of living of the above workers in order to compensate them, whose basket remained practically unchanged and that was not managed by Istat completely autonomously (see, for example, Filosa and Visco, 1977).

### Chronology

1927: first COLI and first basket for selected cities, base 1927 and 1928

- 1932: specification for Foods introduced in the COLI for selected cities, base 1914
- 1933: besides 1914, the COLI was based 1919, 1920, 1921
- 1947: National COLI, for 5 categories of products and for cities chief towns of provinces, base 1938
- 1951: COLI elaborated also at a regional level
- 1951: introduction of the “trade union TCPI” for dependent workers cost of living variations measurement
- 1957: introduction of the “Indice dei prezzi al consumo”, 267 items, base 1953, later on renamed “Indice dei prezzi al consumo per l’intera collettività nazionale”, NIC
- 1964: from January, COLI transformed in an index for typical non-agricultural household, base 1961
- 1967: from January both the NIC and the COLI based 1966
- 1968: from March, COLI renamed “Indice dei prezzi al consumo per le famiglie di operai e impiegati non agricoli”, FOI
- 1992: starting elaborating both NIC and FOI with and without “tobacco”
- 1998: end of the “trade union TCPI”
- 1997: introduction of the “Harmonized Index of Consumer Prices”, HICP
- 1999: introduction of the chained NIC and FOI.

**III)** Within the EU, the convergence of inflation in Member States was an important prerequisite for the formation of a Monetary Union (MU) in 1999. This required a precisely defined measure of inflation and an agreed methodology to ensure that the different countries’ TCPIs were comparable.

A detailed and systematic review of all aspects of the compilation of the TCPIs was therefore undertaken between 1993 and 1996 by all the NSOs of the EU Member States in collaboration with Eurostat. This work culminated in the elaboration of a new EU standard for the 29 Member and Candidate States, and led to the development of the EU’ THICP.

The starting point in 1993 for the elaboration of the THICP was the set of national TCPIs produced by each country. Many of these grew up in the earlier years of the XX<sup>th</sup> century when the aim was not only to measure inflation, but also to have a “compensation” index. This twofold concept did underlie in 1963, and still underlies, a number of TCPIs (Astin, 1999), if not all of them. THICPs are TCPIs compiled according to a methodology that has been harmonized across EU

countries. The THICP is used to assess the convergence criteria on inflation which countries must fulfill in order to adopt the Euro.

It should be stressed that the framework regulation did provide for an index for the EU as a whole (the European Index of Consumer Prices, EICP) and for the Euro-zone (Monetary Union Index of Consumer Prices, MUICP).

Eurostat had been publishing the EICP since the HICPs were launched in March 1997, but as soon as the first-wave members of the MU were announced in May 1998, a Press Release was immediately published giving the MUICP series. The European Monetary Institute (EMI) (the precursor of the ECB) had already indicated very clearly that this index would be used as the main tool by the future ECB for assessing price stability in the Euro-zone, and an explicit target was set by the ECB in October 1998.

The “HICP for the Euro-zone” (or MUICP) is a weighted average of the individual THICPs of the 12 Member States in the area. Country weights are calculated every year. They are based on each country’s share of private final domestic consumption expenditure in the European MU (EMU) total.

MUICP is an indicator of inflation and price stability for the European Central Bank (ECB), whose primary goal is to maintain price stability, defined as keeping the MUICP below but close to 2% for the medium term.

**IV)** In the US, according to Gale Encyclopedia of US Economic History (1999), the first attempt to use an index to compare price changes was prepared for the U.S. Senate in 1893. When labour and management began meeting to hammer out labour agreements in the early years of the XX<sup>th</sup> century, they needed an accurate, official TCPI so workers would receive automatic wage increases that kept pace with inflation. During the I World War, inflation accelerated, and an accurate TCPI became more important than ever.

When Keynesian economic theory gained acceptance during the 1930s, the TCPI became a tool government economists could use to fine-tune fiscal policy. For example, if the TCPI showed that prices were falling, the government might become concerned that demand was weak and could lower taxes to stimulate consumer spending. As the XX<sup>th</sup> century closed, the TCPI remained one of the most closely watched measures of the health of the US economy. Besides determining appropriate wage increases, the index was also used to calculate Social Security payment adjustments and income tax brackets.

**V)** Since the beginning of its long story, the TCPI has also been used as a deflator, mainly in NA framework, by NSOs to elaborate constant price series of the main aggregates and by researchers to deflate aggregates to be used as variables in macro or micro models.

## The development of the PPPs

D) The PPPs, which measure the households' consumer price level differences in space, or the spatial inflation, has been developed as a consequence of the need of making international comparisons of GDP.

To this aim, the GDP parities have been elaborated and subsequently the PPPs have been elaborated too, as components of the formers, on households' consumption baskets (parts of the GDP baskets).

Therefore, PPPs are evidently anything but SCPIs and might have been ideated, so our view is, explicitly or more likely, implicitly, according to the reasoning that is going to be illustrated below.

In space domain, there is not a hierarchy or ordering of situations or subjects like in time domain. Indeed, time  $1$  comes after time  $0$  and time  $2$  comes after time  $0$  and time  $1$  and so on. In general, time  $t$  comes after times  $0, 1, 2, \dots, t-1$ . Hence, the base reversibility does not have relief in time domain.

Should reversibility relief, also in time domain the quasi-transitivity of the Laspeyres formula would not be useful. But in time domain, one indeed needs to know the inflation of the month, say, of May or, in other words, between the end of April and the end of May, and not between end of May and end of April, which would not make sense (and would be impossible to be calculated). In fact, the time multiple framework, as above said, is worth in one direction only.

In space domain it is not so. The multiple frame is worth in  $n$  directions, as many the countries or regions of which one wants to compare the price levels are.

Indeed, if there are more than two countries or regions, let's say, three, A, B, and C, of which we want to compare the households' consumer price levels, it is not supposable a unique ordering (A, B, C) in which B follows A and C follows B. In this case, the orderings can be  $n(n-1)$ . Besides the above one, one can also put: (B, C, A); (C, A, B); (B, A, C); (A, C, B); (C, B, A).

By the way, if the countries or regions were two, A and B for instance, then the problem would not exist as the transitivity was not requested and one could just use the Fisher formula which is base reversal. Of course, also in time if the periods are two, there is not a need for Laspeyres formula and a Fisher one might be used. The question is that both in time and in space the situations are multiple and not binary and therefore the comparisons between two positions are to be viewed in the framework of multiple comparisons.

Therefore, it is evident that it is not possible to elaborate a series of fixed base indexes (Laspeyres) (as is done in time domain, even in countries where the chained TCPIs are used), with - taking as an example the first ordering, A, B, C -

base A:  $I_{A,C}^L = \frac{\sum_{h=1}^k p_{C,h} q_{A,h}}{\sum_{h=1}^k p_{A,h} q_{A,h}}$  and  $I_{A,B}^L = \frac{\sum_{h=1}^k p_{B,h} q_{A,h}}{\sum_{h=1}^k p_{A,h} q_{A,h}}$  and then to use the quasi

transitivity to obtain  $I_{B,C} = \frac{\sum_{h=1}^k p_{C,h} q_{A,h}}{\sum_{h=1}^k p_{B,h} q_{A,h}}$ , as this would provide the households'

consumer price level comparison between C and B as one of the two allowable by the base A SCPI series, the other being, from the second allowable base A ordering (A, C, B):

$$\frac{I_{A,B}^L}{I_{A,C}^L} = \frac{\sum_{h=1}^k p_{B,h} q_{A,h}}{\sum_{h=1}^k p_{A,h} q_{A,h}} \cdot \frac{\sum_{h=1}^k p_{C,h} q_{A,h}}{\sum_{h=1}^k p_{A,h} q_{A,h}} = I_{C,B} = \frac{\sum_{h=1}^k p_{B,h} q_{A,h}}{\sum_{h=1}^k p_{C,h} q_{A,h}}$$

Thus, if one would wish to know the price level difference between C and B, it would be impossible to establish whether to take the first formula  $I_{B,C}$ , or the second one  $I_{C,B}$ .

Moreover, the base A series would prevent to perform all the other comparisons possible from the other 5 orderings equally allowed.

This is the reason why it is necessary to shift the question of making consistent, univocal space households' consumer price level comparisons to the search of a PPI which is transitive.

This has led to the proposal of many transitive PPPs, which in turn has opened the way the dispute known as "the great debate" on PPPs.

**II)** To briefly recall the terms of the search for such transitive PPPs, let's consider the binary and the multilateral approaches, as the two frames for their elaboration, and greatly limit the field to the two paradigmatic examples represented by the Gini-Éltető-Köves-Szulc (GEKS) and by the Geary-Khamis (GK)/Gerardi methods.

The idea underlying the GEKS binary transitive PPP is that of transforming base reversal Fisher PPPs into transitive PPPs by imposing to all the couples of comparisons a least squares condition:

$$\min_{\sum_{s=1}^n \log GEKS_{i,s} GEKS_{s,i'}} \sum_{s=1}^n (\log GEKS_{i,s} GEKS_{s,i'} - \log I_{i,s}^F I_{s,i'}^F)^2$$

where  $i$  and  $i'$  are two areas under comparison and  $s$  denotes all the other areas involved in the comparison. As transitivity implies  $GEKS_{i,s} GEKS_{s,i'} = GEKS_{i,i'}$ , the above least squares condition can be re-written:

$$\min_{\sum_{s=1}^n \log GEKS_{i,i'}} \sum_{s=1}^n (\log GEKS_{i,i'} - \log I_{i,s}^F I_{s,i'}^F)^2.$$

By deriving as regards  $\log GEKS_{i,i'}$  and taking the first order conditions, after

some simple mathematics the transitive PPP  $GEKS_{i,i'} = \left(\prod_{s=1}^n I_{i,s}^F I_{s,i'}^F\right)^{\frac{1}{n}} = \left((I_{i,i'}^F)^2 \prod_{s \neq i,i'}^n I_{i,s}^F I_{s,i'}^F\right)^{\frac{1}{n}}$  is obtained.

The GK multilateral transitive parity is based on a common basket for all the  $n$  areas involved in the comparison. The price  $p_{ih}$  ( $i=1, \dots, n$ ;  $h=1, \dots, k$ ) of each good and service in the  $n$  areas is converted into a common currency called ‘‘Purchasing Power Standard’’ (PPS) by means of a conversion factor  $w_i$  ( $i=1, \dots, n$ ).

For each good and service, the arithmetic mean of the price  $w_i p_{ih}$ , weighted

with the quantity  $q_{ih}$  is taken:  $z_h = \frac{\sum_{i=1}^n w_i p_{ih} q_{ih}}{\sum_{i=1}^n q_{ih}}$  ( $h=1, \dots, k$ ), which is the

average price of good or service  $h$  in the  $n$  countries.

The conversion factor is in turn defined for each country as the arithmetic mean of the relative variation of the average price  $z_h/p_{ih}$  weighted with the value  $p_{ih}q_{ih}$ :

$$w_i = \frac{\sum_{h=1}^k z_h q_{ih}}{\sum_{h=1}^k p_{ih} q_{ih}} \quad (i=1, \dots, n).$$

The transitive GK PPP is defined by the ratio:

$${}_i GK_{i'} = \frac{w_i}{w_{i'}}.$$

The Gerardi multilateral transitive PPP differs from the GK PPP as regards the common average price  $z_h$ , which is defined as the geometric mean of the prices  $p_{ih}$  expressed in the national currencies and not converted through the PPS:

$$z_h^G = \left( \prod_{i=1}^n p_{i,h} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

**III)** All the activity concerning the PPPs has been undertaken in the framework of the International Comparisons Project (ICP), from 1989 renamed International Comparison Programme. Thus, the history of the PPPs proceeds parallel to the history of the ICP.

To quote Eurostat-OECD (2006), the origins of international price and volume comparisons of GDP can be traced back to the experimental comparisons carried out by the Organisation for European Economic Cooperation (OEEC) in the 1950s. Two approaches were adopted.

The first was a comparison made from the expenditure side using mainly price data. Initially, it covered France, Germany, Italy, the United Kingdom and the United States. Subsequently, it was expanded to include Belgium, Denmark, the Netherlands and Norway.

The second was a comparison between the United Kingdom and the United States made from the production side using mainly quantity data.

In both studies, “purchasing power equivalents” rather than exchange rates were used to express the GDPs and their components in a common currency and at uniform price levels.

The reasons given for using purchasing power equivalents are well known, and stand in the commonly recognized inadequacy of the exchange rates to measure the space price level differences, and will not be discussed here.

As a matter of fact, it has been necessary to elaborate an index which might substitute them and this was done by proposing many space indexes.

**IV)** Some remarks are in order here. It is commonly accepted to speak about PPPs when making GDP comparisons. Indeed, the indexes used for these comparisons are not, strictly speaking, PPPs, as they are not calculated on the basis of common consumption baskets but, instead, of common wider baskets, those of the goods and services composing the GDP, including the consumption basket. Only an index calculated on the basis of the latter basket is a SCPI and therefore, a PPP. And only the latter is an appropriate tool for measuring the households’ space price levels differences, that is, the households’ spatial inflation. On the other hand, also Eurostat and OECD, in several contexts speak about GDP parities and PPPs so making a clear distinction between the two.

This is a very relevant point in the regions and countries welfare comparisons. Leaving aside the discussion, to day re-opened by the increasing dissatisfaction in using GDP as the sole parameter for comparisons, it is the use of PPPs for spatial households' income and welfare comparisons that is increasingly becoming a question that cannot further be neglected, due to the crucial multidirectional impact they have in modern, complex and integrated economic, social and political systems. This is true at any space level, starting from national to regional levels. And the perception of the need of producing regional level PPPs for regional households' income welfare comparisons is fortunately rapidly increasing. In Italy, for example, Istat has undertaken since a couple of years a project aiming at producing PPPs at the level of the 20 Italian regions.

V) Returning to the story of PPPs, in the late 1960s the research work was continued under the auspices of the ICP, initially under the programme for International Comparisons of Output and Productivity (ICOP) initiated by Angus Maddison at Groningen University in the Netherlands.

Responsibility for the ICP was shared by the UNSD and the University of Pennsylvania, with the University of Pennsylvania taking the leading role. The research was a co-operative effort involving many institutions and persons in the countries participating in the project. Both the Ford Foundation and the World Bank made major financial contributions. The first director of the project was Irving Kravis of the University of Pennsylvania (Eurostat-OECD, 2006).

VI) The project's initial task was to develop a methodology which would serve for a comprehensive system of international comparisons based on parities. In this it was assisted by the experiences gained from the two OEEC comparisons of market economies, the comparisons of centrally-planned economies co-ordinated by the Council for Mutual Economic Assistance since 1959, the comparisons carried out in the early and late 1960s in Latin America and the comparisons between centrally-planned and market economies started by Statistics Austria during the 1960s.

The next task was to test the methodology by making actual comparisons. Thus, the first three rounds or phases of the ICP – 1970, 1973 and 1975 - were essentially experimental in character. Comparisons were set up for a small group of countries representative of different income levels, social systems and geographical regions.

In Phase I, comparisons of GDP were made for ten countries for 1970. In Phase II, the ten Phase I countries were joined by six others. Comparisons covering all sixteen countries were made for 1970 and for 1973.

Phase III comparisons covered 34 countries and had 1975 as the reference year. The results of these and subsequent ICP comparisons were published with the US

as reference country and the international dollar as numeraire (Eurostat-OECD, 2006).

After Phase III, there were three major developments. First, the ICP became a regular part of the work programme of the UNSC, with the University of Pennsylvania advising on methodological issues. Second, Eurostat started to play an increasingly important role, organising the comparisons for the EU, providing technical and financial assistance to regional comparisons in Africa and encouraging the OECD to become involved in the work. The third and most significant development was the regionalisation of the ICP.

The need for regionalisation became evident in several respects during Phase III. It was clear that, as the number of participating countries increased, a highly centralised scheme of organisation was no longer feasible, especially as there was no one international body in a position to manage it. Early results from Phase III had indicated that countries within regions tended to form more or less homogeneous subsets and it was recognised that there were operational advantages in grouping countries according to their geographical proximity. The Phase III comparison for the EU had demonstrated that a comparison tailored to meet the specific requirements of a region need not jeopardise the larger comparison of which it is a part (Eurostat-OECD, 2006).

Regionalisation placed a greater share of the work on the regional organisations of the United Nations, namely: the Economic Commission for Europe (ECE), the Economic Commission for Latin America and the Caribbean (ECLAC), the Economic and Social Commission for Asia and the Pacific (ESCAP) and the Economic and Social Commission for Western Asia (ESCWA). This left UNSC at the centre to co-ordinate the regional comparisons and to ensure that they could be linked in a global comparison. Two rounds of the ICP were completed after regionalisation: Phase IV which covered 60 countries and had 1980 as the reference year; and Phase V which covered 64 countries and had 1985 as the reference year. A third round, Phase VI, covering 83 countries and having 1993 as the reference year, was started but not completed. Reports were published for the regional comparisons carried out in Africa, the Middle East, Asia and Europe.

At the global level, the regional distribution of countries that participated in the six rounds of the ICP shows a limited and uneven coverage. The results are published on average six year after the reference year.

After Phase VI failed to produce a world comparison, the UNSC decided in 1997 that the ICP should be thoroughly reviewed before any further round was attempted. A consultant was recruited to establish whether or not the ICP should continue and, if it should, what improvements were required and how these improvements should be brought about. The consultant's report was presented to the UNSC in 1999, containing several remarks and suggestions, including that of

not sanctioning a new round until at least the management and resource issues had been addressed.

The UNSC response to the report was to ask the World Bank (WB) – the de facto global co-ordinator of the ICP since 1993 - to propose a strategy for a comprehensive solution to the deficiencies identified by the consultant. The WB, in consultation with other interested agencies, drew up an implementation plan for a new round of the ICP.

The reference year for the new round is 2005. Data collection was scheduled to start towards the end of 2004. Regional comparisons were scheduled to be organised by the African Development Bank, the Asian Development Bank, ESCWA, ECLAC, Statistics Canada, the Interstate Statistical Committee of the Commonwealth of Independent States (CISSTAT), the State Committee of the Russian Federation on Statistics (Goskomstat-Russia), Eurostat and the OECD. A global office has been established at the WB to provide overall co-ordination and to ensure technical and procedural uniformity across the regions (Eurostat-OECD, 2006).

**VII)** One of the regional comparison programmes that resulted from the regionalisation of the ICP was the European Comparison Programme (ECP). It was launched at the twenty-seventh plenary session of the Conference of European Statisticians (Geneva, June 1979). The ECE is responsible for the ECP and publishes the results of its comparisons, but the actual comparisons are organised by other agencies. This is because the ECP is an amalgam of independent comparisons involving different groups of countries. The Eurostat-OECD PPP Programme is central to the ECP and brings with it coverage beyond Europe through the inclusion of non-European OECD Member Countries.

Six rounds of the ECP were conducted between 1980 and 1999/2000. Before 1996, the ECP covered two groups of countries. Group I consisted of the countries that were participating in the comparisons organised by Eurostat and the OECD for their joint programme. Group II consisted of countries from central and eastern Europe that were participating in the comparisons co-ordinated by Statistics Austria specifically for the ECP at the request of the ECE.

Group I comparisons were multilateral comparisons, based on a common basket of goods and services, with each country being compared directly with each of the other participating countries. Group II comparisons were bilateral comparisons with each country compared directly with Austria. Each bilateral comparison was based on a different basket of goods and services. Quality adjustments were made when it proved impossible to find strictly comparable goods and services. Adjustments were also made for differences in the productivity of producers of non-market services such as general public administration, health and education. Comparisons between Group II countries were made through

Austria. Comparisons between countries in Group I and countries in Group II were also made through Austria.

The 1996 comparison was a turning point for the ECP. It had three important features. The first was that a third group of countries, Group III, was included in the ECP. The group was made up of the member countries of the Commonwealth of Independent States (CIS) - except Ukraine - plus Mongolia and Turkey. The Group III comparison was a multilateral comparison. It was managed by the OECD with the assistance of CISSTAT, Goskomstat-Russia and the State Institute of Statistics of Turkey. Countries in Group III were compared with countries in Group I and Group II through Austria.

The second feature of ECP 1996 was that the comparisons in Group II were organised as a single multilateral comparison and not as a set of bilateral comparisons with Austria.

The third feature was the start of the break-up of Group II. The Czech Republic, Hungary, Poland and the Slovak Republic – countries which originally had participated in Group II comparisons - moved to Group I. The Russian Federation and Slovenia, while remaining in Group II, also participated in the Group I comparisons on an experimental basis. By ECP 1999/2000, Group II no longer existed. The results of all ECP comparisons carried out between 1980 and 1996 were published with Austria as the reference country and the Austrian schilling as numeraire. After 1996, results have been presented with the EU as reference country and the euro as numeraire (Eurostat-OECD, 2006).

**VIII)** The first official comparison conducted by Eurostat was for 1975. It covered the nine countries that were EU Member States at that time. Subsequently, until 1990, Eurostat carried out comparisons every five years, in 1980, 1985 and 1990. These comparisons were principally for EU Member States and countries like Greece, Portugal and Spain that were in line for EU membership. But countries falling into neither of these two categories - such as Israel in 1980, Austria in 1980, 1985 and 1990, and Switzerland in 1990 - also participated. Austria's participation was occasioned by the need to provide a "bridge" between the EU Member States and other countries in ECP Group I and the eastern and central European countries in ECP Group II. Throughout these first twenty years, the Programme was under the direction of Hugo Krijinse Locker.

After 1990, Eurostat adopted the "rolling benchmark approach" and started making annual comparisons. At the same time, the number of countries covered rose from 14 in 1991 to 19 in 1994 after which it stayed stable until 1999. The increase was due to the continuing enlargement of the EU and to countries of the European Free Trade Association (EFTA) harmonising their statistics and statistical programmes with those of EU Member States. In 1999, the number of countries covered by Eurostat comparisons rose to 31 (Eurostat-OECD, 2006).

**IX)** Encouraged and assisted by Eurostat, the OECD began organising comparisons for those OECD Member Countries that were not already included in Eurostat comparisons in the early 1980s. The first comparison had 1980 as the reference year, but data collection did not start until 1983 and was limited to four countries. Two of these - Japan and the United States – were major non-European economies of particular interest to the European Commission (EC) because of their trade and investment links with the EU. The results of this retrospective exercise were combined with those from the Eurostat comparison, thereby covering 18 of the OECD's 24 Member Countries.

Thereafter the OECD worked closely with Eurostat to effect comparisons for 1985 and 1990. When put together, the Eurostat and OECD comparisons covered 22 OECD Member Countries in 1985 and all 24 OECD Member Countries in 1990. It was during this time that formal agreements between the two organisations were made to establish the Eurostat-OECD PPP Programme. Eurostat and the OECD agreed to co-ordinate the data collections in two different groups of countries with the object of combining the data sets of the two groups in a single comparison.

**X)** From the beginning, Eurostat has published the results of comparisons with the EU as reference country and an artificial currency unit – the Purchasing Power Standard or PPS - as numeraire. (The PPS is, in effect, the “average” of the currencies of all EU Member States.) The OECD published the results of the 1980 and 1985 comparisons with the US as reference country and the international dollar as numeraire because coverage of OECD Member Countries was incomplete. From 1990, when all Member Countries started to participate in the Programme, the OECD has published results of comparisons with the OECD as reference country and OECD dollars as numeraire. (The OECD dollar is the “average” of the currencies of all OECD Member Countries.)

**XI)** As regards methods for calculating the parities, prior to 1980, the ICP employed the Country-Product-Dummy (CPD) method to calculate PPPs at the basic heading level and the Geary-Khamis (GK) method to aggregate the basic heading PPPs up to the level of GDP. These methods were not generally accepted at the time and their advantages and disadvantages relative to other methods are still a subject of debate among experts. Regionalisation allowed the use of alternative methods. Eurostat and OECD comparisons have always used the GEKS method to calculate parities at the basic heading level.

Eurostat would also have liked to move away from the GK method of aggregation – for the 1975 comparison it had employed the Gerardi method – but it did not do so. Instead, in consultation with the UNSD, it commissioned a study to investigate the relative merits of the GK method and the Gerardi method (the great debate we announced above). The study favoured the GK method and it was used by Eurostat and the OECD for their 1980 and 1985 comparisons.

Subsequently, Eurostat proposed that the GEKS method be used to aggregate basic heading parities because it provided volume indexes that were free of the Gerschenkron effect - because of the negative correlation between prices and volumes. In other words, expenditure patterns change in response to changes in relative prices because consumers switch their expenditure towards relatively cheap products - and that these indexes were better suited to the requirements of users within the EC. The OECD, on the other hand, wanted to retain the GK method, because, while its volume indexes were not free of the Gerschenkron effect, the real final expenditures on which the indexes were based were additive - which GEKS real final expenditures are not - and, as such, more relevant to the type of analysis carried out by OECD economists. Consequently, in 1988 and again in 1989, the UNSD, the OECD and Eurostat jointly convened a meeting of experts to discuss aggregation methods. The experts recognised that comparison results serve many different purposes and that there was no one method of aggregation which can be considered satisfactory for all these purposes. They recommended the calculation and dissemination of two sets of results: one set to be aggregated using the GEKS method, the other to be aggregated using the GK method.

On the other hand, the results for EU Member States being used for administrative purposes - the allocation of structural funds - as well as for economic analysis, Eurostat selected the GEKS results as the official results for the European Union.

The OECD agreed to publish these first and to publish the GK results a year later. This allowed time for the GEKS results to be accepted as official and avoided any confusion that could arise from the simultaneous dissemination of two sets of results (Eurostat-OECD, 2006).

**XII)** The debate on GDP international comparisons and PPPs, i.e., on household consumer price level comparisons and related households' income and welfare comparisons is still open. It is alimented by the huge, and ever increasing relevance kept by the topic, even more in the present globalization time, which makes increasingly complicated and integrated the economic and social relationship among countries and peoples and claims for even more refined tools for their balanced control and management and as much as possible equalitarian and capable to allow an adequate development to poor countries, to help them and allow to get suitable achievements in welfare and progress.

Besides the above quoted Eurostat-OECD Manual, many have been the contributions to the above debate, with the aim of finding out acceptable and shared solutions.

First of all, the series of paper that refer, strictly or in a broader sense, to the activity of the University of Pennsylvania. Just to quote some of them, Gilbert and Kravis (1954), Gilbert et alii (1958), Kravis, Kennessey, Heston, and Summers (1975), Kravis, Heston and Summers (1978, 1982), United Nations, and Eurostat

(1994), United Nations (1997), OECD (1995, 1996). Also, the academic debate was deep and stimulating and was participated, among the many valuable contributors, by Hill (1982), Gerardi (1982), Krijinse Locker (1983), Khamis (1984), Ferrari and Riani (1998).

## Conclusion

The historical path of the CPI that we have delineated in the framework of the unifying time-space global view is, in our opinion, the only capable to allow a comprehensive analysis.

Indeed, we wanted to approach the topic in a way that in some cases has forced us to be very general, that went beyond the TCPI, including HIPC, by involving the overall problems of the price index numbers as well. This, both because such a generalization allows a better understanding of the dynamics that have concerned the CPI in time and space, and because induced by the fact that many authors and many papers treat in a often inseparable way, however always very integrated, both the price index numbers and the time and space CPIs. In space domain, this does not occur and all the research work concerns the SCPI, even though also in this case, if one wants to be choosy, there are some overlapping, sometimes even not too clear, between the GDP parities and the PPPs.

We have continuously reminded, in this conclusion too, time and space.

Indeed, this is the general reading key with which we aimed at looking at the history of CPI as this is the only interpretation that one should give of TCPI and PPP, that is, as two horns of the same problem, in a dual meaning.

Such a dual approach, although in some cases has been hint, has never been fully discussed excepting, as far as we know, the works by Prasada Rao (2001), Ferrari, Laureti and Mostacci (2005), Ferrari, Laureti and Mondéjar (2009), Biggeri and Laureti (2009), who have proposed a harmonized-integrated approach. Of course, the idea has received no implementation.

Nevertheless, the dual way of looking at the subject is heavily progressing in the International organisms, in the supranational Statistical Offices, such as Eurostat, and in NSOs, which begin now considering the possibility of producing the price indexes in time and space in a harmonised and integrated way.

Indeed, it seems to us that this is the only accomplishable way in the future, capable to give the more mature fruits as regards the solution of the many statistical-economic problems that remain open and, above all, as regards the concrete construction of the CPIs in time and space, with remarkable synergies and gains in terms of efficiency and costs.

## References

- ADELMAN, I. (1958): "A New Approach to the Construction of Index Numbers". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 40, N. 3, 240-249.
- AFRIAT, S. N. (1967): "The Cost of Living Index". In Shubik M. (Ed.): *Essays in Mathematical Economics*, Princeton University Press, 335-365.
- (1969): "The Method of Limits in the Theory of Index Numbers". *Metroeconomica*, Vol. 21, 141-165.
  - (1970): "The Concept of a Price Index and Its Extension". Paper presented at the Second World Congress of the Econometric Society, Cambridge.
- ALLEN, R. G. D. (1935): "Some Observations on the Theory and Practice of Price Index Numbers". *The Review of Economic Studies*, Vol. III, 57-66.
- (1949): "The Economic Theory of Index Numbers". *Economica*, Vol. XVI, N. 63, 197-203.
- ASTIN, J. (1999): "The European Union Harmonized Indices of Consumer Prices (HTICP)". *Statistical Journal of the United Nations ECE*, 16, 123-135.
- BALK, B. M. (1981): "Second Thoughts on Wald's Cost-of-Living Index and Frisch's Double Expenditure Method". *Econometrica*, Vol. 49, N. 6, 296-298.
- (1995): "Axiomatic Price Index Theory: A Survey". *International Statistical Review*, 63, 69-93.
- BANERJEE, K. S. (1956): "A Note on the Optimal Allocation of Consumption Items in the Construction of a Cost of Living Index". *Econometrica*, Vol. 24, N. 4, 294-295.
- (1959): "A Generalization of Stuvell's Index Number Formula". *Econometrica*, Vol. 27, N. 4, 676-678.
- BASU, A. (1980): "Consumer Price Index Numbers. Sampling Problems in Prices". *Indian Labour Journal*, 1, 582.
- BENEDETTI, C. (1967): "Il bilancio ottimale del consumatore in un generale spazio metrico delle quantità". *Atti della XXV Riunione Scientifica della SIS*, Bologna, Vol. 1, 407-432.
- (1969): "Ricerche su un tipo generalizzato di indice del costo della vita". *Metron*, Vol. 27, N. 3-4, 3-40.
  - (1972): "Vecchi e tradizionali indici dei prezzi ricondotti a moderni indici funzionali a costante utilità". *Metron*, Vol. 30, N. 1-4, 67-86.
- BIGGERI, L. (1984): "Teoria e pratica dei numeri indici: vecchi orientamenti e recenti sviluppi". *Atti della XXII Riunione Scientifica della SIS*, Sorrento, Vol. 2, 327-352.
- BIGGERI L., FERRARI, G., MARLIANI, G. and PIQUÉ, L. (1984): "Bibliografia sui numeri indici". *Quaderni del Dipartimento Statistico*, Università di Firenze, 22.

- BIGGERI, L. and LAURETI, T. (2009): "Are Integration and Comparison Between CPIs and PPPs Feasible?," In *Price Index Numbers in Time and Space*, Biggeri L., and Ferrari G. (Eds.): Springer-Verlag, forthcoming.
- BLACKORBY, C. and RUSSEL, R. R. (1978): "Indices and Subindices of the Cost of Living and the Standard of Living". *International Economic Review*, Vol. 19, N. 1, 229-240.
- BLACKORBY, C., PRIMONT, D. and RUSSEL, R. R. (1978): "An Extension and Alternative Proof of Gorman's Price Aggregation Theorem". In Eichhorn W. et al (Eds.): *Theory and Applications of Economic Indices*, Physica Verlag, 109-141.
- BOWLEY, A. L. (1919): "The Measurement of Changes in the Cost of Living". *Journal of the Royal Statistical Society, A*, Vol. 82, 343-361.
- (1928): "Notes on Index Numbers". *The Economic Journal*, Vol. 38, N. 150, June, 216-237.
- CASTELLANO, V. (1963): "Remarks on the True Cost-of-Living Index". *Bulletin of the ISI*, Ottawa, Vol. 4, N.1, 307-317.
- CIRIPICCHI MELONI, A. (1975): "A Generalized Cost of Living Index After the Model of Konus". *Metron*, Vol. 33, N. 3-4, 335-353.
- CLEMENTS, K. W. and IZAN, H. Y. (1981): "The Measurement of Inflation: A Stochastic Approach". *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 339-50.
- DE HAAAN, J., OPPERDOES, E. and SCHUT, C. M. (1999): "Item Selection in the Consumer Price Index: Cut-off Versus Probability Sampling". *Survey Methodology*, 25, 1, 31-41.
- DIEWERT, W. E. (1974): "Homogeneous Weak Separability and Exact Index Numbers". *Technical Report N. 122*, IMSSS, Stanford University.
- (1976): "Exact and Superlative Index Numbers". *Journal of Econometrics*, Vol. 4, 115-145.
- (1978): "Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation". *Econometrica*, Vol. 46, N. 4, 883-900.
- (2008): "New Methodological Developments for the International Comparison Program". Paper presented at the joint UNECE/ILO Meeting on Consumer Price Indices, May 8-9, Geneva.
- (1992): "Essays in Index Number Theory: an Overview of Volume 1". *Discussion Paper No. 92-31*, The University of British Columbia, Vancouver.
- DIVISIA, F. (1925): "L'indice monetaire et la theorie de la monnaie". *Revue d'Economie Politique*, 842-861; 980-1008; 1121-1151;
- EDGEWORTH, F. Y. (1922): *Sui metodi per accertare e misurare le variazioni del valore della moneta*. Utet, Serie V, Vol. XX, Torino.
- EICHHORN, W. (1973): "Zur axiomatischen theorie des preis index". *Demonstratio Mathematica*, Vol. 6, 561-573.

- EICHHORN, W. and VOELLER, J. (1976a): *Theory of the Price Indices*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin.
- (1976b): *Theory of the price index: Fisher's test approach and generalisations*. Lectures notes in economics and mathematical systems, Springer-Verlag, Berlin.
  - (1990): *Axiomatic foundations of price indexes and purchasing power parities, Price level measurement*. North-holland, Amsterdam.
- EUROSTAT-OECD. (2006): *Eurostat-OECD Methodological Manual on Purchasing Power Parities*. <http://www.oecd.org/dataoecd/59/10/37984252.pdf>.
- EUROSTAT and DIPARTIMENTO DI STATISTICA, Università di Firenze (Eds.). (1996): *Improving the Quality of Price Indices*. Florence.
- FEENSTRA, R. C. and REINS DORF, M. B. (2002): *Should Exact Index Numbers have a Standard Error? Integrating the Stochastic and Economic Approach*. University of California Working Report, November.
- FERRARI, G. and GORI, E. (1984): "Una procedura per la stima dell'indice del costo della vita e di subindici del tipo di Konus-Benedetti". *Quaderni del Dipartimento Statistico*, n.26, Firenze.
- FERRARI, G. and RIANI, M. (1998): "On Purchasing Power Parities Calculation at the Basic Heading Level". *Statistica*, anno LVIII, n. 1.
- FERRARI, G. LAURETI, T. and MOSTACCI, F. (2005): "Time-Space Harmonization of Consumer Price Indexes in Euro-Zone Countries". *International Advances in Economic Research*.
- FERRARI, G. LAURETI, T. and MONDÉJAR, J. (2009): "Harmonized Cross Region and Cross Country CPI Time-Space Integration in the Euro-Zone". Three Characters in Search of an Author, in *Price Index Numbers in Time and Space*, Biggeri L., and Ferrari G. (Eds.): Springer-Verlag, forthcoming.
- FISHER, F. M. and SHELL, K. (1972): *The Economic Theory of Price Indices*. Academic Press, New York.
- FRISCH, R. (1936): "Annual Survey of General Economic Theory: the Problem of Index Numbers". *Econometrica*, Vol. 4, N. 1, 1-38.
- (1938): "The Double Expenditure Method". *Econometrica*, Vol. 6, N. 1, 85-90.
- FROSINI, B. V. (1969): "Applicazioni dei numeri indici dei prezzinell'ambito della teoria dell'utilità ordinale". *Rendiconti dell'Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere*, Vol. 103, 191-219.
- GALE ENCYCLOPEDIA OF U.S. ECONOMIC HISTORY. The Gale Group Inc. (1999): "Consumer Price Index". 17 August.
- GERARDI, D. (1982): "Selected Problems of Inter-Country Comparisons on the Basis of the Experience of the EEC". *Review of Income and Wealth*, series 28, No.4, December.

- GILBERT, M. and KRAVIS, I. (1954): *An International Comparison of National Products and the Purchasing Power of Currencies: A Study of the United States, the United Kingdom, France, Germany and Italy*. OEEC, Paris, 1954.
- GILBERT, M. and ASSOCIATES. (1958): *Comparative National Products and Price Levels: A Study of Western Europe and the United States*. OEEC, Paris.
- GINI, C. (1924): "Quelques considérations au sujet de la construction de nombres indices des prix et des questions analogues". *Metron*, Vol. 4, N. 1, 3-162.
- HILL, P. (1982): *Multilateral Measurements of Purchasing Power and Real GDP*. Eurostat.
- ISTAT. (1930): *Bollettino Mensile di Statistica*, Anno VIII, gennaio.
- (1957): "Numeri indici dei prezzi – Base 1953=100". *Metodi e Norme*, Serie A – N.3, ottobre.
  - (2009): *Bollettino Mensile di Statistica*, maggio.
- JOHNSON, D. G. (1975): "The Accuracy of Regression Based Cost Indices". *Journal of the Royal Statistical Society, A*, Vol. 138, 411-422.
- KHAMIS, S. H. (1961): "On Some Problems in Index Numbers Methodology". *Bulletin of the ISI*, Tokyo, Vol. 38, N. 2, 117-128.
- (1970): "Properties and Conditions for the Existence of a New Type on Index Numbers". *Sankhya*, Series B, Vol. 32, Parts 1 and 2, 81-98.
  - (1977): "Spatio-temporal Index Numbers". *Bulletin of the ISI*, New Delhi, Vol. 47, N. 4, 272-275.
  - (1984): "Application of Index Numbers in the International Comparisons and Related Concepts". *Review of Income and Wealth*, series 30, No.1, March.
- KLEIN, L. R. and RUBIN, H. (1947): "A Constant-utility Index of the Cost of Living". *The Review of Economic Studies*, Vol. XV (2): N. 38, 84-87.
- KLOEK, J. and THEIL, H. (1965): "International Comparisons of Prices and Quantities Consumed". *Econometrica*, 33, 535-56.
- KONUS, A. A. (1939): "The Problem of the True Index of the Cost of Living". *Econometrica*, Vol. 7, N. 1, 10-29.
- (1958): "Consumer Prices Indexes and Demand Functions". *Review of the ISI*, Vol. 26, N. 1/3, 29-36.
- KRIJINSE LOCKER, H. (1983): "On the Estimation of Purchasing Power Parities on the Basic Heading Level". *Review of Income and Wealth*, Series 29.
- KRAVIS, A., KENESSEY, Z., HESTON, A. and SUMMERS, R. (1975): *A System of International Comparisons of Gross Product and Purchasing Power*. The John Hopkins University Press, Baltimore.
- KRAVIS, A., HESTON, A. and SUMMERS, R. (1978): *International Comparisons of Real Product and Purchasing Power*. The John Hopkins University Press, Baltimore.

- (1982): *International Comparisons of Real Product and Purchasing Power*. The John Hopkins University Press, Baltimore.
- LEMMI, A. and CAVALLI, M. (1984): "Indici "veri" del costo della vita e analisi della disuguaglianza distributiva della spesa per consumi". *Atti della XXXII Riunione Scientifica della SIS*, Sorrento, Vol. 2, 407-419.
- LEONI, R. (1967): "Sulla determinazione di un indice del costo della vita del tipo di Konus". *Atti della XXV Riunione Scientifica della SIS*, Bologna, Vol. 1, 561-574.
- LERNER, A. P. (1935): "A Note on the Theory of Price Index Numbers". *The Review of Economic Studies*, Vol. III, 50-56.
- MARTINI, M. (1992a): *I numeri indice in un approccio assiomatico*. Giuffrè, Milano.
- (1992b): "General Function of Axiomatic Index Numbers". *J. Ital. Statist. Soc.*, 3, 359 - 376.
- MC ALLISTER, H. E. and WANG, M. C. (1978): "The Fact of Sample Change on the Stability of a Index Number". *Proceedings of the Business & Economic Statistics Section, ASA*, 820-824.
- OECD. (1995): *Purchasing Power Parities and Real Expenditures, 1993. Volume 1, EKS Results*, Paris.
- (1996): *Purchasing Power Parities and Real Expenditures, 1993. Volume 2, GK Results*, OECD, Paris.
- PARENTI, G. (1940): "La tecnica ed il significato dei primi numeri indice dei prezzi". *Economia*, N. 6, 179-208.
- RAO, D. S. PRASADA. (2001): "Integration of CPI and PPP: Methodological Issues, Feasibility and Recommendations". *Joint World Bank – OECD Seminar on PPP*, Washington, DC, p. 1-26.
- RAO, D.S. PRASADA, DORAN, H. E. and SELVANATHAN, E. A. (2002): "Estimation of General and Commodity-Specific Inflation Rates Using Linear Time-Varying Constraints". *Journal of Agricultural and Applied Economics*, 34, 67-74.
- PREDETTI, A. (1976): "Aggregati economici a prezzi costanti e indici impliciti dei prezzi". *Il Risparmio*, Anno XXIV, N. 5, 675-684.
- SATO, K. (1974): "Ideal Index Numbers that Almost Satisfy the Factor Reversal Test". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 56, N. 4, 549-552.
- (1976): "The Ideal Log-change Index Number". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 58, N. 2, 223-228.
- SELVANATHAN, E. A. and RAO, D. S. PRASADA. (1984): *Index Numbers: A Stochastic Approach*. London, Macmillan Publishing Co.
- STAHELE, H., JOSEPH, M. F. W. and LERNER, A. P. (1935): "Further Notes on Index Numbers". *The Review of Economic Studies*, Vol. 3, 153-158.
- TENDERINI, D. (1934): "Il significato teorico e pratico degli indici dei prezzi". *Rivista italiana di statistica, economia e finanza*, Anno VI, 269-331; 426-506; 734-772.

- THEIL, H. (1960): "Best Linear Index Numbers of Prices and Quantities". *Econometrica*, Vol. 28, N. 2, 464-480.
- (1968): "On the Geometry and the Numerical Approximation of Cost of Living and Real Income Indices". *De Economist*, N. 116, 677-689.
  - (1973): "A New Index Number Formula". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 55, N. 4, 498-502.
- TORNQVIST, T. E. (1936/1937): "The Consumption Price Index of the Bank of Finland". *Bank of Finland Monthly Bulletin*, N. 10, 1-8; 73-95.
- TURVEY, R. (2004): *Consumer price index manual: theory and practice*. ILO, <http://www.ilo.org/public/english/bureau/stat/guides/cpi/index.htm#manual>
- UGGÉ, A. (1941): *Sul metodo di eliminazione nella costruzione dei numeri indici dei prezzi*. Pontificia Academia Scientiarum, Città del Vaticano, Roma.
- UNITED NATIONS. (1997): "International Comparison of Gross Domestic Product in Europe". *Conference of European Statisticians Statistical Standards and Studies*, No. 47, New York and Geneva.
- UNITED NATIONS and EUROSTAT. (1994): *World Comparisons of Purchasing Power and Real Product, 1985: Phase V of the International Comparison Programme*. New York.
- VARTIA, Y. O. (1976): "Ideal Log-change Index Numbers". *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 3, 121-126.
- VENTURA, A. (2009): "La composizione dei "panieri" per gli indici dei prezzi al consumo in Italia (1927-1978)". *Storia e Futuro*, N. 20, giugno.
- WILKERSON, M. (1964): "The Revised City Sample for the Consumer Price Index". *Monthly Labour Review*, Vol. 83, N. 19, 1078-1083.
- (1964): "Measurement of Sampling Error in the Consumer Price Index: First Results". *Proceedings of the Business & Economic Statistics Section, ASA*, 220-230.
  - (1967): "Sampling Error in the Consumer Price Index". *JASA*, Vol. 66, N. 333, 33-41.

## CAPÍTULO 13

# La comunidad científica de Ginebra del siglo XVIII: Estudio de la probabilidad en el *Cours de Logique* de Gabriel Cramer

ANTONIO FRANCO RODRÍGUEZ DE LÁZARO  
M<sup>a</sup> CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS  
MERCEDES CASAS GUILLÉN  
Universidad CEU San Pablo

### Introducción

Durante los siglos XVI y XVII, el formalismo doctrinario y dogmático del calvinismo impide la evolución de la ciencia en Ginebra, a excepción de la Teología. A comienzos del siglo XVIII el prestigio de Ginebra como centro científico comienza a extenderse, teniendo un impulso especialmente notable entre los años 1730 y 1760. Es tan importante el movimiento científico en Ginebra que muchas contribuciones de la historia de las ciencias matemáticas y de la física del siglo XVIII se deben a ilustrados ginebrinos.

Una de las figuras destacables de este movimiento científico es el catedrático de matemáticas y filosofía Gabriel Cramer (1704-1752). La principal aportación

que se le reconoce a Cramer es la Regla para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas, sin embargo, cultivó diversas áreas de conocimiento y se relacionó con muchos científicos de todo el mundo. Estableció contacto con Jean, Daniel y Nicolas Bernoulli en Basilea, estudió astronomía en Cambridge y visitó Oxford, codeándose con Saunderson, Halley, Moivre y Stirlings. En París contactó con algunos científicos tales como Fontenelle, De Mairan, Reamur, Algaroti, Maupertuis, Buffon y Clairaut. En 1750 obtuvo la Cátedra de Matemáticas en la “Academie de Gêneve”.

Este trabajo analiza el desarrollo de la comunidad científica internacional que se forma en la ciudad de Ginebra a lo largo del siglo XVIII, la importancia de uno de sus miembros, Gabriel Cramer, y en particular el estudio que realiza sobre probabilidad en una de sus obras, “Cours de Logique”, escrita hacia 1745.

## **Ginebra, centro cultural y científico del siglo XVIII**

Conviene narrar alguno de los hechos ocurridos en Ginebra a lo largo de la historia para explicar por qué una ciudad idílica como Ginebra situada entre montañas y junto a un lago, que disfruta de un clima templado centroeuropeo y que cuenta con habitantes cultos, educados y muy reservados, se convierte en un centro científico internacional en el siglo XVIII, y que hoy en día es un importante centro financiero con un elevado prestigio en la fabricación de relojes, instrumentos científicos, joyas y alimentos.

Existen vestigios de asentamientos celtas en lo que actualmente es Ginebra, pero son los romanos los que la transforman en un eje básico del tráfico comercial bajo la denominación de Genava. En el siglo V se convierte en capital del reino germano de los burgundios y Conrado II la reconoce como ciudad imperial en el año 1032 y. Esta sucesión de transiciones hacia estatus de mayor influencia y prestigio confluye en dos hechos que marcarán para siempre a Ginebra, ponerse del lado de la Reforma, no tanto por cuestiones de fe sino más bien por razones políticas, en su lucha por independizarse del ducado de Saboya y la llegada del teólogo francés Juan Calvino (1509-1564) en 1536. Calvino es expulsado en 1538 por el excesivo rigor moral que trataba de imponer a sus habitantes pero regresa en 1541 ante la petición expresa de los dirigentes ginebrinos. Esta vez Calvino no se limitó a predicar e influir en las costumbres sino que asumió el poder político instaurando un régimen teocrático y convirtiendo a Ginebra en uno de los centros más importantes del protestantismo.

En 1602 la ciudad derrotó al ejército del Duque de Saboya, obligándole a abandonar cualquier reivindicación territorial. A lo largo de los siglos XVII y XVIII Ginebra se convirtió en una pequeña ciudad-estado hasta el año 1798 cuando fue incorporada a Francia, lo que tenía su lógica porque se encuentra casi

totalmente rodeada por territorio francés. Finalmente, ingresó en 1815 en la Confederación Suiza como cantón soberano.

Durante los siglos XVI y XVII no existía en Ginebra una auténtica comunidad científica, porque el puritanismo doctrinario y dogmático del calvinismo era contrario al desarrollo de las ciencias experimentales; de tal forma que solo auspiciaba unos prestigiosos estudios teológicos basados en las enseñanzas de Aristóteles, bajo la atenta mirada de La Venerable Compagnie des Pasteurs<sup>1</sup>.

En 1685 Luis XIV revocó el edicto de Nantes mediante el edicto de Fontainebleau, prohibiendo el protestantismo en Francia, el desenlace que produjo este hecho es bien conocido, alrededor de 200.000 hugonotes huyeron a Inglaterra, Alemania, Suiza y Países Bajos. Este proceso migratorio afectó a Ginebra porque en 1687 encontraron asilo en ella unas 8.000 personas, alcanzándose la cifra de 16.000 habitantes en 1693 a pesar de haber soportado una epidemia de peste.

El prestigio conseguido por Ginebra como ciudad refugio es la génesis de su posterior auge económico y cultural. La llegada ininterrumpida de comerciantes y artesanos promovió un entramado comercial basado en la producción de relojes, joyas y alimentos, unido a la implantación de un sector bancario cada vez más eficaz e influyente<sup>2</sup>. Un número significativo de inmigrantes arribaba a Ginebra con un excelente bagaje de conocimientos, lo que hizo que se convirtiera en el lugar idóneo donde las familias acomodadas europeas podían mandar a sus hijos/as a completar su educación.

En la transición del siglo XVII al XVIII Jean Robert Chouet (1642-1731) y Jean Alphonse Turretini (1671-1737) influyeron decisivamente para que la Academia de Ginebra y la Iglesia ginebrina convencieran a los pastores protestantes que adoptaran una actitud menos doctrinaria y dogmática. Habían sido deslumbrados por la filosofía racionalista, lo que les llevó a prescindir de las enseñanzas de Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) reemplazándolas por las ideas de René Descartes (1596-1650), John Locke (1632-1704) e Isaac Newton (1643-1727). Buscaban certezas o al menos evidencias utilizando el método cartesiano, cuyo origen era la desconfianza, estableciendo observaciones y análisis basados en el razonamiento lógico. Pretendían lograr la verdad sustituyendo el culto a los antiguos filósofos por la reflexión propia. A partir de este momento la burguesía

---

<sup>1</sup> Calvino fundó dos organismos eclesiásticos, la Venerable Compañía formada por los pastores y doctores encargados de enseñar y seleccionar a los futuros pastores; y el Consistorio constituido por los pastores y ancianos a los que se les encomendaba la dirección de los asuntos eclesiásticos de la congregación.

<sup>2</sup> El auge económico de Ginebra en el siglo XVIII es una consecuencia lógica de su neutralidad política, los acuerdos con la Liga Hugonote y la revolución financiera causada por el frecuente recurso al crédito, lo que favoreció la creación de instituciones financieras en rápida evolución y provocó un importante aumento de la moneda en manos del público y de los medios de pago, así como un incremento en la velocidad de circulación del dinero.

ginebrina pierde interés por la Teología como actividad intelectual, por eso, sus hijos abandonan estos estudios para dedicarse a la ciencia.

La concentración paulatina en Ginebra de intelectuales generó un entorno favorable en el que casi un centenar de científicos se formó académicamente y desarrolló su actividad investigadora, obteniendo importantes hallazgos en distintos campos de la Ciencia. Tenían como característica fundamental la autoexigencia de una gran precisión en su quehacer diario, prerrequisito que estaba motivado por una ética calvinista que exaltaba el trabajo y la austeridad. Con esta actitud consiguieron notables avances en el conocimiento similares a los logrados en la actividad económica. El incremento más significativo de conocimientos se originó entre 1730 y 1760.

Participaron en el proceso matemáticos como Gabriel Cramer (1704-1752), astrónomos, físicos, geólogos y sobre todo zoólogos, botánicos y biólogos. La historia de las ciencias matemáticas y físico-naturales no puede elaborarse sin citar a algún científico ginebrino.

El aumento de riqueza experimentado por los ginebrinos a comienzos del siglo XVIII no consiguió eliminar las grandes diferencias que existían entre las clases sociales, agravando los conflictos internos. Ginebra era una república burguesa en la que sólo los que poseían grandes fortunas tenían la capacidad financiera suficiente para pagar los impuestos que se exigía para adquirir el título de burgués y ejercer los derechos políticos. Sólo el 25% del cantón era burgués, el 50% estaba formado por artesanos y el 25% restante eran campesinos que cumplían la función de siervos.

La clase burguesa estaba controlada por una oligarquía de grandes familias vinculadas entre sí mediante uniones matrimoniales. Este pequeño grupo de familias constituyó una aristocracia que mantuvo el poder a lo largo del siglo XVIII conviniendo la creación de un Pequeño Consejo formado por 25 miembros de ellas, asignándole la elección de los 4 Síndicos y asumiendo las funciones propias del Gran Consejo, que estaba integrado por todos los ginebrinos con derechos políticos.

La alta burguesía dirigió sus investigaciones hacia las materias de carácter físico-natural porque querían ensalzar el orden de la naturaleza como reflejo del plan divino de la Creación<sup>3</sup>. Por el contrario, la pequeña burguesía se preocupó de los problemas sociales y humanísticas. Podemos destacar dos motivos de la alta reputación y gran repercusión internacional<sup>4</sup> del trabajo de estos intelectuales, el

---

<sup>3</sup> Los jóvenes de las grandes familias contribuyeron a prestigiar con su actividad científica a la clase social a la que pertenecían. Las justificaciones ideológicas de carácter teológico, dominantes desde el siglo XVI, eran sustituidas por otras de carácter científico.

<sup>4</sup> La oligarquía formada por las grandes familias controló el desarrollo de la ciencia ginebrina de la misma manera que ocurrió con la vida política y económica. Las relaciones y alianzas

desarrollo de una poderosa industria editorial controlada por familias burguesas y la generalización del francés como lengua científica.

## Biografía de Gabriel Cramer

La familia de Cramer llegó a Ginebra en 1634, accediendo a la alta burguesía en 1668 mediante una alianza matrimonial. El padre de Gabriel Cramer, Jean Isaac Cramer, cumplió el deseo de ser profesor y luego decano de la Facultad de Medicina, también fue miembro del consejo de los Doscientos y de los Sesenta. Su madre Anne Mallet procedía de una famosa



familia de librereros franceses. Los hermanos Gabriel y Philibert Cramer combinaban su labor de librereros y editores con su actividad en la política de la ciudad. De su labor de editores en esta etapa hay que destacar la publicación de casi todas las obras de Voltaire, y algunas de D'Alembert y Morellet, que introdujeron de forma clandestina en Francia. Philibert abandonó su profesión de librero, dedicándose a sus funciones oficiales en Ginebra, y sin embargo Gabriel siguió siendo librero y cultivó la música y el teatro. Voltaire opinaba que Philibert Cramer era un hombre de "ingenio y gusto", mientras que Gabriel era menos brillante y aficionado a las mujeres<sup>5</sup>.

Gabriel Cramer nació el 31 de julio de 1704 en Ginebra y realizó sus estudios en la Academia como discípulo de Etienne Jallabert (1658-1723), nombrado profesor de Filosofía con el apoyo de Jean Robert Chouet. Cramer presentó con dieciocho años, la tesis *Dissertatio Physico-Mathematica de Sono* realizada bajo la dirección de Jallabert.

---

financieras, económicas y religiosas que habían establecido estas familias con todos los países, proporcionó a los jóvenes científicos de Ginebra la posibilidad de lograr vínculos con prestigiosos intelectuales europeos y trayectorias investigadoras de prestigio internacional.

<sup>5</sup> Febvre, L. y Martin, H-J. (1956) *La aparición del libro*. Colección Libros sobre libros. Ed. CONACULTA-Fonca. Pág. 180.

DISSERTATIO  
PHYSICO-MATHEMATICA

DE  
S O N O,

*Quam,*  
FAVENTE NUMINE,

*Sub præsidio*

D.D. STEPH JALLABERT V.D.M.

Philosophiæ & Matheseos Professoris Celeberrimi,

*Publicè suæ conabitur*

GABRIEL CRAMER GENEVENSIS

*Auctor & Respondens.*

*Die Lunæ 21<sup>st</sup> mensis Augusti 1724 hæc hæque facta.*



GENEVE.

Typis CRAMER, PERACHON & CRAMER FILII.  
M. DCC. XXII.

DISQUISITIO  
PHILOSOPHICA  
DE  
ERRORIBUS

QUI EX ANIMI MOTIBUS NASCI SOLENT.

*Quam,*

DEO FAVENTE,

*Sub Præsidio*

D.D. GABRIELIS CRAMER,

Matheseos & Philosophiæ Professoris,

*Publicè suæ conabitur*

JOH. PETR. TREMBLEY, GENEV. AUCTOR.

*Die Martis proximi Augusti 22<sup>st</sup> hæc hæque facta.*



GENEVE.

Typis Hæc. CRAMER & Fratrum PHILIBERT.  
M DCCXL

El fallecimiento de Jallabert en 1724 dejó vacante la cátedra de Filosofía, que fue concedida a Amédée de la Rive, pero algunos magistrados influyeron para que la Academia dotara de una cátedra de Matemáticas, separando definitivamente la enseñanza de la filosofía y de las matemáticas, y nombrara a dos jóvenes de veinte años, Giovanni Ludovico Calandrini (1703-1758) y Gabriel Cramer, que la ocuparían alternativamente<sup>6</sup>. Uno daría clases mientras el otro completaba su formación realizando estudios en el extranjero. Ambos contaban con importantes apoyos familiares en el Petit Conseil.

En 1727 Cramer se trasladó a varias ciudades europeas con la finalidad de completar sus estudios. Los primeros seis meses estuvo en Basilea trabajando con los hermanos Bernoulli. Jean (1667-1748) del que fue discípulo, Daniel (1700-1782) y Nicolás (1687-1759). Pasó ocho meses entre Cambridge y Oxford, en Cambridge trabando amistad con el matemático inglés Nicholas Saunderson (1682-1739), en Oxford con el astrónomo, matemático, meteorólogo y físico inglés Edmond Halley (1656-1742), y con el matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754). En Leyden conoció al filósofo y matemático holandés Willem Jacob's Gravesande (1688-1742) y en París, donde se relacionó con el escritor y filósofo francés Bernard le Bovier de Fontenelle (1657-1757), el geofísico francés Jean-Jacques d'Ortous de Mairan (1678-1771), el filósofo, matemático y astrónomo francés Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), el naturalista, botánico, matemático, biólogo, cosmólogo y escritor Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), el físico René Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757), el filósofo y economista Étienne Bonnot, abate de Condillac (1715-1780) y el

<sup>6</sup> Cramer y Calandrini hicieron innovaciones pedagógicas, permitiendo a los estudiantes realizar las presentaciones de sus trabajos en francés, en lugar de hacerlo en latín como era la costumbre, con este cambio aumentó el número de alumnos participantes.

matemático Alexis Claude Clairault (1713-1765). Los contactos a través de correspondencia científica con estos investigadores lograron una rápida transmisión de los descubrimientos entre las principales universidades europeas<sup>7</sup>.

Regresó a Ginebra en 1729 para impartir clases en la cátedra de Matemáticas, donde sustituyó el análisis geométrico de los clásicos por el nuevo análisis algebraico.

En 1734, Calandrini se fue a la Cátedra de Filosofía, por lo que Cramer era el único Catedrático de Matemáticas de Ginebra. Ese mismo año, la actividad política y su implicación con el Gobierno local le llevaron a Cramer a formar parte del “Consejo de los Doscientos”<sup>8</sup>.

En su *Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques*, publicada en Ginebra en 1750, señala que el álgebra consigue reducir los problemas al cálculo más simple y más fácil de interpretar. En 1750 pasó a desempeñar la cátedra de Filosofía. Los campos matemáticos que atrajeron su atención fueron la Geometría y el Álgebra. Su gran aportación a Ginebra fue organizar una escuela científica, en la que destacó como un gran maestro debido a su método y paciencia, sabiendo mezclar saber y juicio, precisión y claridad.

El enorme prestigio científico y las relaciones políticas de Cramer le permitieron crear la cátedra de física experimental en 1737 para su amigo Jean Jallabert (1712-1768), hijo de su maestro Etienne Jallabert, nieto de Louis Tronchin y protegido del pastor Jean Alphonse Turretini.

Aunque Cramer era matemático siempre tuvo un gran interés por las Ciencias Naturales, así como por la Geografía y la Cosmografía, es famosa su discusión con Maupertuis sobre los resultados de sus medidas del grado del meridiano. Dirigió la tesis que Robert Guillaume Rillet presentó en 1735 sobre la estructura física de la Tierra<sup>9</sup>.

Cramer era partidario de las teorías newtonianas y de la filosofía de Locke. En 1731 publicó *Memoire sur le Systeme de Descartes et sur les moyens cf en deduire les orbites et les aphelies des planetes* donde estudiaba la gravedad y el motivo de la forma elíptica de la órbita de los planetas. Se ocupó de mecánica y astronomía.

Entre las obras que se publicaron por su labor editora hay que destacar los *Elementos* de matemáticas de Wolff (*Cristian Wolffii Elementa Matheseos Universae*, Ginebra, 1732, 1741, 5 vols), las obras de Bernoulli (*Joh. et Jac.*

<sup>7</sup> Buffón acudió a Ginebra para estudiar matemáticas con Cramer y Cramer viajó a París en 1748.

<sup>8</sup> En las funciones públicas de Ginebra actuaban varios Consejos: el Pequeño Consejo o Consejo Estrecho, el Consejo de los Sesenta (principalmente diplomático) y el Gran Consejo o Consejo de los Doscientos. Este último era el de mayor relevancia en las decisiones gubernamentales.

<sup>9</sup> La trascendencia de este trabajo de investigación es que incorpora un resumen de las ideas que prevalecían en Europa en 1730 respecto de la estructura física de nuestro planeta.

*Bernoulli Opera Omnia*, Lausanne y Ginebra 1742-1744, 4 vols.). También publicó la correspondencia de Leibnitz con Bernoulli (Lausanne, 1745, 2 vols.).

Gabriel Cramer destacó internacionalmente por sus trabajos en matemáticas aunque realizó pocos descubrimientos, su labor más importante consistió en completar y hacer comprensibles los hallazgos logrados por otros. Sus obras son mucho más útiles que algunos textos que contienen múltiples ideas nuevas pero su exposición es poco clara. En 1749 ingresa como miembro de la “Royal Society”.

En 1751 Cramer sufrió un accidente al caerse de un carro que le obligó a guardar cama durante dos meses. Por recomendación del médico, Cramer debía descansar y dejar a un lado la excesiva carga de trabajo, por lo que decidió ir al sur de Francia para recuperarse, falleciendo camino de Bagnols sur-Cèze (Francia) el 4 de enero de 1752.

## Contribuciones científicas de Gabriel Cramer

### 1. La teoría de la utilidad

Gabriel Cramer emplea el concepto de utilidad en 1728, en la carta que escribió a su amigo y colega Daniel Bernoulli, exponiendo sus especulaciones acerca de la Paradoja de San Petersburgo y la resolución de la misma. En los Comentarios de la Academia de San Petersburgo de 1731, vol. 5, 175-192, Daniel Bernoulli escribe un artículo titulado “De Mensura Sortis” donde propone una posible solución a la paradoja basada en el concepto de esperanza moral o utilidad<sup>10</sup>. Fue estudiado por el mundo científico durante los siglos XVIII – XIX, y a mediados del siglo XX fue redescubierto por Jon Von Neuman y Oscar Morgenstern en su aplicación a la Teoría de Juegos.

El problema consiste en un juego de azar muy sencillo: se comienza con una cantidad inicial de “bote” de 2 monedas (actualizándolo a nuestro lenguaje son dos euros) y se lanza una moneda al aire. Si el resultado es cruz, el apostador que está jugando dobla la cantidad del bote, si el resultado obtenido es una cara, el jugador se lleva el bote disponible en ese momento y finaliza el juego. Si en la primera tirada sale cara, el jugador gana 2 €; si primero sale cruz y después cara el jugador recibe 2<sup>2</sup> €; si en la primera y segunda el resultado son cruces y la tercera cara, el jugador recibe 2<sup>3</sup> € y así sucesivamente. Lógicamente, cuanto más tarde en salir cara, mayor es la ganancia para el jugador, si la cara aparece en la “n-ésima” tirada el apostador lograría 2<sup>n</sup> euros. La mínima cantidad que puede obtener el jugador es

<sup>10</sup> Santos del Cerro, J. García Secades, M. (Coordinación) (2006) *Historia de la Probabilidad y la Estadística (III) AHEPE*. Capítulo Fuentes Bibliográficas para el estudio de la Historia de la Estadística y la Probabilidad. Ed. Delta Universidad, Pág. 169.

2 euros, que sería cuando al lanzar la moneda en la primera tirada, ésta resultase cara.

La cuestión planteada por los matemáticos es: ¿qué cantidad debería cobrarse a los jugadores para que participen en el juego?.

Para cobrar una cuota de entrada en el juego igual a la ganancia media o esperada del juego, tenemos que calcular cuál es esta ganancia media, determinando los resultados obtenidos y sus probabilidades. Sabiendo que la probabilidad de que la primera cara salga en la “n-ésima” tirada es  $\frac{1}{2^n}$ , saliendo cruz en las n-1 tiradas anteriores, la ganancia esperada se obtiene de la forma:

$$E(G) = 2 \frac{1}{2} + 2^2 \frac{1}{2^2} + 2^3 \frac{1}{2^3} + \dots \text{ esto nos da un resultado de la ganancia infinita.}$$

El juego tiene un valor esperado infinito, por lo que cualquier cuota de entrada al mismo será inferior a la ganancia del jugador, aunque nadie estaría dispuesto a pagar una suma grande de dinero por participar en el juego, a pesar de que los premios sean elevados, es por lo que este problema matemático fue considerado una paradoja.

La contribución científica de Cramer fue incluir una función de utilidad como parte de su análisis matemático. Esta función está basada en la raíz cuadrada de la cantidad empleada. Cramer razona del siguiente modo<sup>11</sup>:

“Los matemáticos estiman dinero en proporción a su cantidad, y los hombres de buen sentido en proporción al uso que pueden hacer de ello”.

Lo que quería decir Cramer es que el valor del dinero no estaría incrementado en proporción lineal a la cantidad aritmética, sino más bien en sentido monótono, con crecimiento decelerado, pero con una tasa que disminuye tanto como se ha incrementado la cantidad de riqueza. El matemático suizo postuló una cota superior absoluta de  $2^{24}$  monedas como el límite superior de utilidad.

Aunque la opción de Cramer de la raíz cuadrada fuera no exactamente la correcta, este pensamiento condujo a Bernoulli a proponer la función logarítmica como base para medir la utilidad del dinero. Bernoulli aportó la idea que la riqueza de alguien debe ser un factor en el concepto de utilidad. Cramer había omitido este punto último completamente, intentando encontrar una definición pura, más universal de la utilidad.

Lamentablemente, la función de Bernoulli y el rompecabezas de San Petersburgo con eficacia no pasaron a pensadores modernos durante un largo

<sup>11</sup> MC Donnell, Philip J. (2008) *Optimal Portfolio Modeling: models to maximize return and control risk in Excel and R+CD-Rom*. Capítulo: Utility Models Preferences toward risk and return. Edit. Hoboken, N.J. Pág. 82.

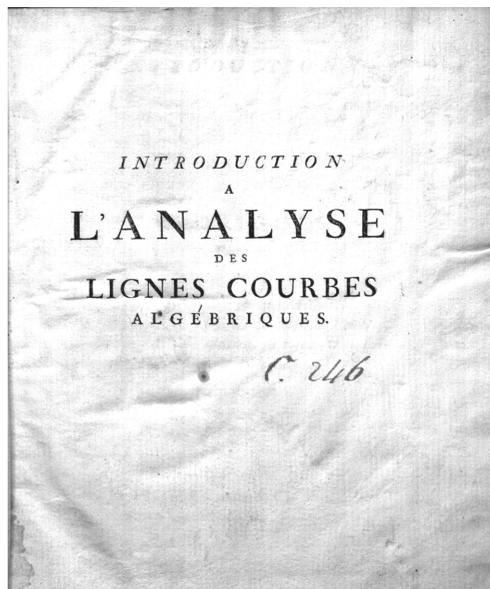
período de tiempo, hasta los años 1950 en que los trabajos de Cramer y Bernoulli fueron traducidos por eruditos modernos.

A finales de 1944, Jon Von Neuman y Oscar Morgenstern publicaron su innovador trabajo “Teoría de Juegos y Comportamiento Económico”. Su contribución científica fue axiomatizar la idea de una función de utilidad como monótona creciente de la función cóncava de riqueza. En otras palabras, un dólar más a un millonario no le aporta tanto como un dólar a un pobre. El valor del dólar aumenta, pero en una tasa que disminuye ligeramente.

Por último hay que destacar que el concepto de utilidad de Cramer ha sido relevante para su aplicación en la matemática financiera y en las carteras de inversión.

## 2. Introducción al Análisis de las curvas algebraicas

La obra *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques* fue publicada en cuatro volúmenes en 1750. Después de un capítulo introductorio en el que se definen tipos de curvas y se discuten técnicas de representación gráfica, Cramer pasa en el segundo capítulo a estudiar las transformaciones que simplifican las curvas. El tercer capítulo versa sobre la clasificación de las curvas, y en él se presenta la famosa Regla de Cramer.



Es particularmente interesante la que se conoce como “Paradoja de Cramer”. Una curva de orden “n” queda determinada en general por  $\frac{n(n+3)}{2}$  puntos, así pues, una cónica (n=2) queda determinada unívocamente por cinco puntos y una cúbica (n=3) por nueve puntos. Sin embargo, por el teorema de MacLaurin-Bezout dos curvas de grado “n” se cortan en  $n^2$  puntos, luego dos cúbicas distintas se cortan en 9 puntos, y por lo tanto es obvio que  $\frac{n(n+3)}{2}$  no siempre determina una y sólo una curva de orden “n”. Esta paradoja se resolvió casi un siglo después gracias a la notación abreviada de Julius Plücker (1801-1868) que en 1828 publica en los “*Annales de Gergonne*” la explicación a la que él llama Paradoja de Cramer-Euler. De forma general, se puede enunciar que cualquier conjunto de  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  puntos arbitrarios del plano nos determinará un conjunto adicional de  $n^2 - \left[ \frac{n(n+3)}{2} - 1 \right] = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  puntos “dependientes” de los primeros, tales que cualquier curva de grado “n” que pase por el conjunto dado de puntos, pasará también por todos los puntos dependientes<sup>12</sup>.

### 3. Introducción al Análisis de las curvas algebraicas

“Il en est dans la nature comme dans l’expérience, deux effets paraissant toujours ensemble, ou l’un est cause de l’autre ou tous les deux dépendent de la même cause s’ils ne se trouvent pas toujours ensemble, mai souvent la certitude que l’on a de leur liaison est plus ou moins probable. On renvoye ce cas à la matière des Probabilités”<sup>13</sup>.

Así comienza Gabriel Cramer a tratar la probabilidad en su curso de lógica. Aunque en realidad es en el párrafo 448 donde, a partir de la noción de certeza, comienza a estudiar el conocimiento probable como conocimiento intermedio entre la certeza de la verdad y la certeza de la falsedad, con las nociones de certeza e incertidumbre. A continuación pasa a las definiciones de los conceptos de probabilidad, de verosimilitud y de certeza moral. Le siguen las reglas o principios de sentido común, recogidas del *Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, y por último analiza las fuentes de la probabilidad, distinguiendo entre probabilidad a priori y a

<sup>12</sup> Véase Boyer, C.B. (1987) *Historia de la Matemática*. Ed. Alianza Universidad Textos, Pág. 538 y 664.

<sup>13</sup> Título del párrafo 438 de la página 254 de la obra *Cours de Logique* de Gabriel Cramer. Traducción: Existen en la naturaleza como en la experiencia, dos efectos que se muestran siempre juntos, o el uno es causa del otro o los dos dependen de la misma causa si no se encuentran siempre juntos, pero a menudo la certeza que se tiene de su conexión es mas o menos probable. En este caso hay que dirigirse a la materia de las Probabilidades.

posteriori<sup>14</sup>. Termina estudiando otras fuentes de probabilidad, la posibilidad igual de varios acontecimientos, el conocimiento de las causas, el testimonio, la analogía y las hipótesis.

El profesor Thierry Martin<sup>15</sup> ha venido realizando diversos estudios sobre la probabilidad en la obra manuscrita de Gabriel Cramer, *Cours de logique*<sup>16</sup> que nunca fue publicada<sup>17</sup>, aunque su texto dio lugar a varios artículos<sup>18</sup> de *l'Encyclopédie*<sup>19</sup>, que después escribiría Monsieur de Lubières<sup>20</sup> para la gran obra de Diderot y D'Alambert de 1765. Esta obra de Cramer parece ser que fue manuscrita por Charles Bonnet<sup>21</sup> que tomaba notas de este curso que impartía Cramer a una joven dama<sup>22</sup>.

“Gabriel Cramer fut à l'origine des travaux probabilistes de Buffon, et notamment de son analyse du problème de Saint Pétersbourg et de la notion d'espérance morale. C'est que révèle clairement la correspondance de Buffon, lequel signale au §XV de son *Essai d'arithmétique morale*, que « c'est au commerce et à l'amitié de ce savant » qu'il a dû « une partie des premières connaissances » mathématiques qu'il a acquises”<sup>23</sup>

<sup>14</sup> Cramer las define como “tomada de la naturaleza misma de la cosa y de las causas que la producen” para la probabilidad a priori, y “tomada de la experiencia de lo pasado” para la probabilidad a posteriori.

<sup>15</sup> Del laboratorio Logiques de l'Agir, en la Université de Franche-Comté.

<sup>16</sup> Esta obra manuscrita llegó a manos del profesor Martin, gracias a la colaboración de Jean-Daniel Candaux, como él mismo indica en la primera página de su artículo *La probabilité dans le Cours de logique de Gabriel Cramer*, publicado en el Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique en 2006.

<sup>17</sup> Aunque el manuscrito se ha perdido, la Biblioteca pública y universitaria de Ginebra conserva cinco copias.

<sup>18</sup> Los tres artículos son Induction, Idée, y Probabilité.

<sup>19</sup> Tanto para la Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, (Neufchâtel, S. Faulche, 1765) como para la Encyclopédie méthodique. Mathématiques, (Paris, Panckoucke, 1785).

<sup>20</sup> Charles Benjamín de Lubières que también escribiría su nota necrológica *Éloge historique de Cramer*, publicado en la *Nouvelle bibliothèque germanique* de Amsterdam, en la edición del año de la muerte de Cramer 1752.

<sup>21</sup> Eminente naturalista discípulo de Cramer, en cuya correspondencia con Jean Senebier en 1786 se refiere al curso de lógica de su profesor Cramer.

<sup>22</sup> Esta dama era la sobrina del señor de Lubières, Marie-Charlotte Boissier-Lullin. Es este el motivo por el que el texto es didáctico para alguien que está aprendiendo, y no está redactado para matemáticos o personas a las que se les supone un cierto conocimiento previo. Por lo tanto recoge el conocimiento de la lógica probabilista del siglo XVIII.

<sup>23</sup> Primera página del artículo de Thierry Martin, *La probabilité dans le Cours de logique de Gabriel Cramer, §448-547 accompagné de l'article « Probabilité » de l'Encyclopédie et de l'Encyclopédie méthodique* en Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique, vol 2 n° 1, Juin 2006. Traducción : Gabriel Cramer estuvo en el origen de los trabajos probabilísticos de Buffon y en particular de su análisis del problema de San Petersburgo y de la noción de esperanza moral. Es lo que revela la correspondencia de Buffon, en el párrafo XV de su *Essai d'arithmétique morale* que dice “es en el comercio y en la amistad con este sabio”, al que él debe “una parte de los primeros conocimientos” matemáticos que adquirió.

Para T. Martin la contribución de Cramer<sup>24</sup> se inscribe dentro de la concepción epistemológica de la probabilidad, y de la evolución de la lógica de lo probable en el siglo XVIII. Intenta también la obra difundir y desarrollar las ideas de Jacques Bernoulli, mejorándolas y ampliándolas<sup>25</sup>. Esta obra ilustra las dificultades para pensar la probabilidad con rigurosidad numérica en el siglo XVIII. Sin embargo toda la obra es una prueba de la exigencia de rigor y de método con una organización muy estructurada y progresiva que da al texto una claridad expositiva que no se refleja para nada en los artículos salidos de ella para *l'Encyclopédie*<sup>26</sup>.

Cramer, con su reputación de buen matemático de la época se permitía hacer observaciones, que eran bien aceptadas por sus colegas. Así, cuando D'Alembert se ocupa de que la probabilidad de obtener una "cara" al efectuar dos lanzamientos de una moneda es  $2/3$ <sup>27</sup>, C. Boyer en su libro *Historia de la Matemática*<sup>28</sup>, afirma que un matemático de Ginebra, que creemos es Cramer, le hace la observación de que los tres casos que considera (x, xy, yy) no son equiprobables. D'Alembert sigue con sus experimentos para determinar probabilidades y recoge estos temas, junto con la crítica a la paradoja de San Petersburgo que considera un verdadero escándalo, en el artículo que publica en 1754 sobre "Croix ou Pile" en *l'Encyclopédie*.

## Conclusiones

En España Cramer es conocido fundamentalmente por la famosa *Regla de Cramer*<sup>29</sup> que publicó dentro de su *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques* en 1750, aunque realmente parece ser que es debida a Maclaurin<sup>30</sup>, que la escribió probablemente hacia 1729<sup>31</sup> cuando se encontraba redactando el *Treatise of Algebra*, como comentario a la obra *Aritmética universalis* de Newton,

<sup>24</sup> Junto con la de Jean Henri Lambert en su obra *Phénoménologie* de 1764.

<sup>25</sup> Véase por ejemplo la décima regla de "bon sens" que añade Cramer a las nueve que ya había definido Bernoulli, en el párrafo 471 de la citada obra.

<sup>26</sup> Parece ser que la redacción hecha para *l'Encyclopédie* por el señor de Lubières de los artículos, es bastante más oscura, ya que por imperativos de brevedad se hace casi incomprensible.

<sup>27</sup> En general se había aceptado que la probabilidad era  $3/4$ , ya que el juego finalizaba si aparece cara en el primer lanzamiento.

<sup>28</sup> Pág. 573, de la edición en castellano de 1987, traducida por Mariano Martínez Pérez.

<sup>29</sup> Esta regla es para resolver sistemas de ecuaciones lineales simultáneas por medio de determinantes.

<sup>30</sup> Suele suceder que las investigaciones debidas a un matemático sean recordadas después atribuyéndoselas a otro matemático, así, la conocida serie de Maclaurin tampoco se debe a él, sino que en realidad aparece publicada en el libro *Methodus incrementorum directa e inversa* de Brook Taylor en 1715, de forma general, aunque había sido conocida mucho antes por el escocés James Gregory (1638-1675) y Jean Bernoulli (1667-1748), e incluso había aparecido en el *Methodus differentialis* de James Stirling (1692-1770) publicado en 1730. También parece que esta misma serie era conocida en la India en 1550.

<sup>31</sup> Véase Pág. 540 de *Historia de la matemática* de Carl Boyer.

sin embargo esta obra no se publicó hasta 1748, dos años después de la muerte de Colin Maclaurin (1698-1746). Según Carl B. Boyer, seguramente una de las causas por las que se conoce esta regla con el nombre de Cramer es la mejor notación de este autor, en la que los coeficientes literales se ven afectados con superíndices, lo que hacía más sencillo determinar el signo de los productos que aparecen en la fórmula, y por lo tanto, hizo que se difundiera mejor la fórmula (o regla de Cramer) que la misma fórmula escrita por Maclaurin<sup>32</sup>.

La relevancia de Cramer respecto al concepto de Probabilidad es indiscutible, pues aunque su obra *Cours de Logique*, no fue jamás publicada, sí que es cierto que dio lugar a varios artículos para l'*Encyclopédie*, lo que fue causa de difusión de los conceptos probabilísticos. Además es de notar su valor como testimonio sobre el estado del pensamiento de los conceptos de probabilidad en la primera mitad del siglo XVIII. En palabras de T.Martin, para comprender cómo se construye una disciplina científica, desde el punto de vista del historiador de las ciencias, no basta con estudiar los elementos motores, fuentes de innovaciones o de transformaciones... Es necesario igualmente considerar la exposición de los resultados, de cierta forma solidificados bajo forma de saber constituido, ya que ellos son los que testimonian de lo que se puede pensar o edificar en tal momento de su desarrollo, permitiendo dar cuenta de la posibilidad de las innovaciones y de las transformaciones del saber<sup>33</sup>.

## Bibliografía

- BOYER, C. B. (1987): *Historia de la Matemática*. Alianza.Universidad Textos. Madrid.
- CAPEL SAEZ, H. (1982): "La teoría física de la tierra. Una tesis en la Ginebra del siglo XVIII". *Neocrítica*, nº 39, año VII. Universidad de Barcelona.
- CRAMER, G. (1745?): *Cours de logique*. Bibliothèque Publique et Universitaire de Genève, MS Trembley 34. Genève.
- FEBVRE, L. Y. y MARTIN, H-J. (1956): *La aparición del libro*. Colección Libros sobre libros. Ed. CONACULTA-Fonca. Pág. 180.
- MC DONNELL, P. J. (2008): *Optimal Portfolio Modeling: models to maximize return and control risk in Excel and R+CD-Rom*. Capítulo: Utility Models Preferences toward risk and return. Edit. Hoboken, N.J., 81-83
- MARTIN, T. (2006): *La probabilité dans le Cours de logique de Gabriel Cramer, §448-547 accompagné de l'article « Probabilité » de l'Encyclopédie et de l'Encyclopédie*

<sup>32</sup> Maclaurin es conocido como uno de los últimos grandes matemáticos ingleses antes del largo eclipse que sufrió la Matemática en Inglaterra a partir de este momento, y por lo tanto es posible que tampoco los matemáticos continentales no prestasen atención a las obras de autores ingleses.

<sup>33</sup> Ver pág. 43 del artículo *La logique probabiliste* de Gabriel Cramer, de T. Martin 2006.

*méthodique* en Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique, vol 2 n° 1, Juin 2006.

- (2006): *Logique du probable de Jacques Bernouille à J.H. Lambert*, en Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique, vol 2 n° 1b, Novembre 2006.
- (2006): "La logique probabiliste de Gabriel Cramer". *Mathematics and Social Sciences*, 44<sup>e</sup> année, n° 176, (4), 43-60.

SANCHEZ MOLINERO, J. M. (1984): "La contribución de Daniel Bernoulli y Gabriel Cramer a la Teoría de la Utilidad". *Revista Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Málaga, n° 13, 9-27

SANTOS DEL CERRO, J. y GARCÍA SECADES, M. (Coordinación) (2006): *Historia de la Probabilidad y la Estadística (III) AHEPE*. Capítulo Fuentes Bibliográficas para el estudio de la Historia de la Estadística y la Probabilidad. Ed. Delta Universidad, Pág. 169.



# Cómo la aproximación Bayesiana a la Inferencia pasó a ser frecuentista

MIGUEL A. GÓMEZ VILLEGAS  
Universidad Complutense

En este trabajo se va a poner de manifiesto cómo la primera aproximación que se hizo a un problema de inferencia fue bayesiana, y posteriormente se verá el motivo y los personajes que hicieron que la aproximación pasara a ser frecuentista.

La inferencia estadística se puede decir que surge con la figura de Thomas Bayes (1701?-1761), tres años después de su muerte, en 1764, ve la luz su trabajo titulado *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances*, publicado por Richard Price. Un estudio pormenorizado de este Ensayo puede verse en Gómez Villegas (2001). La primera traducción del *Ensayo* al castellano, puede verse en Girón y otros (2001), que también contiene copia de un facsímil del original que se conserva en la Biblioteca de la Real Academia de Ciencias de Madrid.

El antecedente más directo que se puede citar del trabajo de Bayes abordado en el Ensayo, es el trabajo de James Bernoulli (1654-1705) titulado *Ars Conjectandi*, que contiene la distribución de Bernoulli y en el que se introduce el concepto de la *esperanza moral* de un suceso, como un intento de determinar la probabilidad de un suceso asociado a un experimento del tipo éxito o fracaso, en función del número de veces que ha sido observado el suceso en  $n$  repeticiones del

experimento. Este problema es recogido por De Moivre (1667-1754). Este hugonote francés que se ve obligado a exilarse a Inglaterra, trata el problema en su libro *Doctrine of Chances*. Con notación actual, se puede decir que intuye que el cociente  $r/n$ , donde  $r$  es el número de veces que se ha observado el suceso en  $n$  repeticiones, se debe aproximar a la probabilidad de éxito  $\theta$  en la distribución de Bernoulli.

Pero tanto Bernoulli como De Moivre, hacen aseveraciones acerca de lo que en la época se llamaban *problemas directos* de probabilidad; problemas en los que se supone conocida la probabilidad de éxito  $\theta$  y se calcula la probabilidad de cualquier sucesión de éxitos y fracasos.

Por el contrario, el problema que abordó Bayes en su Ensayo es el que se llamó desde entonces *problema inverso*. Se trata realmente del problema de inferencia, de conocer  $\theta$  la causa, observado su efecto  $r$ . En expresión actual, lo que hace Bayes es calcular

$$P\{a < \theta < b \mid X = r\}$$

siendo  $X$  una variable con distribución binomial de parámetros  $n$  y  $\theta$ . Para dar sentido a esta expresión, Bayes necesita hacer dos cosas; introducir una probabilidad inicial sobre  $\theta$  y definir la densidad final  $\pi(\theta \mid r)$ . Es notable que Bayes diera estos dos pasos y pone de manifiesto la alta capacidad matemática de Bayes. El descubrimiento fue hecho otra vez unos años más tarde, y con independencia, por Laplace (1794-1827) quién en su *Theorie Analytique des Probabilités*, obtiene además la distribución final para modelos más generales que el binomial.

Para resolver el problema de introducir una probabilidad inicial sobre  $\theta$  Bayes interpreta la probabilidad como:

*La probabilidad de cualquier suceso es el cociente entre el valor en el que uno espera dependiendo de la ocurrencia del suceso que debe ser calculado, y el valor de la cosa esperada una vez que ésta ha ocurrido.*

La definición no es muy clara, pero lo que si que es cierto es que se trata de una aproximación subjetiva a la probabilidad.

Lo que hoy se conoce como versión continua de la fórmula de Bayes, está contenido en la proposición 9 de la Sección II del Ensayo, y no es otra cosa que la expresión de la probabilidad condicionada como cociente entre la densidad conjunta y la marginal; en notación actual

$$P\{a < \theta < b \mid X = r\} = \frac{\int_a^b \binom{n}{r} \theta^r (1-\theta)^{n-r} d\theta}{\int_0^1 \binom{n}{r} \theta^r (1-\theta)^{n-r} d\theta}$$

Tomando como distribución inicial para  $\theta$  la uniforme en el intervalo  $[0,1]$  y el modelo binomial, mediante las expresiones

$$\pi(\theta) = I_{[0,1]}(\theta) \quad P\{X = r \mid \theta\} = \binom{n}{r} \theta^r (1-\theta)^{n-r},$$

Bayes calcula la densidad final por la fórmula

$$\begin{aligned} \pi(\theta \mid X = r) &= \frac{\pi(\theta)P\{X = r \mid \theta\}}{\int_0^1 \pi(\theta)P\{X = r \mid \theta\}d\theta} \\ &= \frac{\theta^r (1-\theta)^{n-r}}{\int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{n-r}}. \end{aligned}$$

El paso que Bayes da es de gigante, capta con precisión el problema de estimación sobre la probabilidad de éxito para la distribución binomial, calcula la expresión de la distribución final, e introduce la distribución uniforme como distribución inicial. Comentarios sobre estos aspectos pueden verse en Gómez Villegas (2001).

El siguiente estadístico en la historia es también bayesiano, se trata de Laplace. En 1774 lee ante la Academia francesa su *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements* y en ella enuncia un principio, que es la versión discreta del teorema de Bayes:

*Si un suceso se puede producir por un número  $n$  de causas diferentes, entonces las probabilidades de esas causas dado el suceso son entre sí como la probabilidad del suceso dadas las causas, y la probabilidad de las causas dado el suceso es igual a la probabilidad del suceso dadas las causas, dividida por la suma de todas las probabilidades del suceso dada cada una de las causas. (Laplace, 1774, p. 623).*

Esto es lo que ahora denominamos teorema de Bayes o versión discreta del teorema de Bayes, cuando todas las causas son inicialmente equiprobables.

Si  $C_1, C_2, \dots, C_n$  son las  $n$  causas y E es el suceso, las causas son sucesos disjuntos y su unión da el total, se tiene que

$$\frac{P(C_i | E)}{P(C_j | E)} = \frac{P(E | C_i)}{P(E | C_j)} \quad \text{o} \quad P(C_i | E) = \frac{P(E | C_i)}{\sum_{j=1}^n P(E | C_j)}$$

Como el teorema de Bayes dice que

$$P(C_i | E) = \frac{P(C_i)P(E | C_i)}{\sum_{j=1}^n P(C_j)P(E | C_j)},$$

cuando las probabilidades de las causas son todas iguales, es decir,  $P(C_i) = \frac{1}{n}$ , las

probabilidades se simplifican. Aunque el teorema parece menos general que el de Bayes, hay que tener en cuenta que, para Laplace, las causas siempre se pueden subdividir en varias causas equiprobables. La demostración que Laplace hace de este resultado está contenida en su *Teoría Analítica*, página 182, y es exactamente igual que la que figura en nuestros libros de texto. También parece fuera de toda duda que el propio Bayes conociera este teorema, su versión continua es una generalización, y para su obtención forzosamente tuvo que basarse en él.

También incluye Laplace en su *Teoría Analítica* (página 364), la versión continua de la fórmula de Bayes, cuando la distribución inicial no es constante, mediante la expresión

$$\pi(\theta | x) = \frac{\pi(\theta)f(x | \theta)}{\int \pi(\theta)f(x | \theta)d\theta}$$

Después de Laplace, la probabilidad se aplica a la *aritmética social*, lo que llamaremos actualmente sociología, con las figuras de Condorcet, Quetelet y Arbuthnot, y es la probabilidad inversa, o la aproximación bayesiana, el método indiscutible de estimación, hasta que Boole publica su libro *Laws of Thought* (1854), en el que introduce su método simbólico de inferencia lógica y pone por primera vez en entredicho la aproximación bayesiana. Básicamente las críticas provienen de considerar a los valores desconocidos como parámetros y no como variables aleatorias. En ese caso ya no es necesario asignar distribuciones de probabilidad iniciales dependientes de cada situación y de cada individuo.

## Las figuras de Karl Pearson, Fisher, Neyman, y Egon Pearson

Karl Pearson (1857-1936) nace en Londres, estudia en el *University College School* y matemáticas en el *King College* de Cambridge. Con 22 años marcha a Alemania a estudiar leyes, física y metafísica. De 1880 a 1884 es profesor de

matemáticas en el *King College* y en el *University College*. En 1911, a la retirada de Galton, ocupa la cátedra Galton de eugenesia. Pearson era un darwinista convencido y un ferviente socialista. Entre 1892 y 1892 da conferencias en el *Gresham College* sobre geometría de la estadística. Estas conferencias marcan el comienzo de una época en la teoría y la práctica de la estadística, a partir de este momento se puede admitir que la estadística ha alcanzado su edad adulta.

Entre 1893 y 1906 publica 100 artículos sobre aplicaciones de la estadística, este trabajo se ve acompañado por la fundación de la revista *Biometrika* para recoger publicaciones de estadística aplicada a la Biología. En 1905 publica *On the general theory of skew correlation and non linear regression* donde introduce el concepto de coeficiente de correlación lineal y generaliza la idea de la independencia o dependencia en estadística. En 1925 funda la revista *Annals of Eugenics*, en 1932 se retira del *University College*, que divide la cátedra de estadística en dos: una de eugenesia, que desempeñará Fisher y una de estadística, que desempeñará Egon Pearson. Todavía en 1934 publica *The Tables of the Incomplete Beta-Function* con las que resuelve el problema de la aproximación de la probabilidad final que había encontrado Bayes en su *Ensayo*.

Para hacerse una idea de su carácter, en su primera época, cuando descubre que los valores de la ruleta no son aleatorios, escribe al gobierno francés, para que cierre los casinos y envíe sus fondos a la *Academie des Sciences* para la fundación de un laboratorio de probabilidad que aplique ésta al problema de la evolución biológica.

Entre sus contribuciones más notables cabe citar la introducción de la familia de curvas que contiene a la beta, la gamma y la normal, para modelizar fenómenos aleatorios, el método de los momentos para ajustar los parámetros de las distribuciones, el desarrollo de la correlación y de la regresión y la introducción del método de la  $\chi^2$  de Pearson, en 1900, para dar una medida del ajuste entre un modelo y una muestra.

El otro estadístico que contribuye al desarrollo de los métodos frecuentistas es Ronald Aylmer Fisher (1890-1962). Fisher nace en East Finley (Londres) y estudia en Stanmore y Harrow; en su juventud tuvo prohibido el estudiar con luz artificial, debido a su delicada visión. Gracias a una beca estudió en el *Casius College* de Cambridge, donde se graduó entre 1909 y 1912.

En 1913 fue lector de física matemática, cursó estudios de biometría y genética, para descubrir de 1913 a 1915 que su vocación no era trabajar en una compañía de inversiones. En 1916 escribe un artículo demostrando que las teorías de Mendel no son rechazadas por la evidencia estadística. El artículo lo referencia K. Pearson como estadístico y Punnett como genético y al no lograr publicarlo en *Biometrika*, la revista dirigida por K. Pearson, esto originó la enemistad entre ambos. En 1917 se casa con Ruth E. Guinness con quien tuvo dos hijos y seis hijas.

En 1919 se une a la estación experimental de Rothamsted donde desarrolla el análisis de la varianza y el diseño de experimentos. En 1924 es elegido miembro de la Royal Society y en 1930 publica *The Genetical Theory of Natural Selection*, donde apoya y actualiza la teoría de la evolución de Darwin. En 1925 publica *Statistical Methods for Research Workers*, donde recoge una gran cantidad de los conceptos sobre los que se basa la aproximación frecuentista a la inferencia, bastantes de los cuales son debidos a Fisher. En 1933 acepta la cátedra de eugenesia en el University College de Londres y se dedica a trabajar a fondo en genética.

Este trabajo le lleva a publicar en 1935 *The Design of Experiments*, que contiene las ideas de Fisher respecto a cómo analizar experimentos desde el punto de vista estadístico, una crítica de la probabilidad inversa, el famoso experimento del *tea-testing* y aspectos interesantes en defensa de los diseños factoriales. Entre 1938 y 1954 se dedica a inferencia estadística. Entre 1952 y 1954 es presidente de la Royal Statistical Society, dedicando sus intervenciones a glosar las contribuciones de los primeros estadísticos. En 1956, con 66 años, publica *Statistical Methods and Scientific Inference*, un libro en el que están recogidas sus principales contribuciones estadísticas.

En 1957 Fisher se retira y se marcha a Adelaida, Australia, como investigador senior. Allí muere de cáncer de boca a la edad de 72 años.

Es interesante recoger los comentarios, expuestos en el libro *The Design of Experiments* (1990 pág. 6), que le llevan a Fisher a estar en contra de la aproximación bayesiana.

El primer argumento es que el teorema de Bayes no fué publicado por éste; si hubiera sido una cosa a la que el autor le hubiera dada gran importancia debería de haber sido publicada por él mismo. El segundo argumento es que el teorema de Bayes no supone la probabilidad cómo una cantidad objetiva, sino como algo que mide tendencias psicológicas. Y añade: un axioma que sea cierto debe ser admitido automáticamente por todo aquel a quién se le muestre; lo cual no ocurre con la aproximación bayesiana. (Aunque personalmente no comparto los argumentos de Fisher en contra de la aproximación bayesiana, considero importante el recogerlos).

Un estudio detallado de las contribuciones científicas de Fisher a la estadística puede verse en Girón y Gómez Villegas (1998).

El desarrollo de los métodos estadísticos bayesianos y frecuentistas, puede verse en el libro de Gómez Villegas (2005).

No se van a dar muchos datos de las biografías de Neyman y Egon Pearson, para no alargar esta contribución, Neyman nace en Bendery, en Rusia entonces y ahora en Moldavia. La contribución de la familia de Neyman a la causa polaca, le valió a Neyman ser varias veces encarcelado; en un intercambio de prisioneros es trasladado a Varsovia, donde conoce a Sierpinsky quien le busca trabajo para

asistir en experimentos agrícolas con sus conocimientos de estadística. Este trabajo le hace solicitar una beca al *University College* de Londres para trabajar con Karl Pearson; allí conoce a Egon Pearson con quien desarrollará la teoría de los tests de hipótesis y de los intervalos de confianza. Estas investigaciones van a llevar definitivamente a la inferencia estadística por la senda frecuentista, alejándola de la aproximación bayesiana inicial.

## El renacimiento bayesiano

El resurgir de las ideas bayesianas se debe principalmente a las figuras de Jeffreys (1891-1989) y de Finetti (1906-1985).

Harold Jeffreys es de formación básica un astrónomo no un estadístico. Nació en Fatfield, en el condado de Durham en Inglaterra. Estudió en el *St John College* en Cambridge, posteriormente explicó matemáticas, geofísica y llegó a ser en Cambridge, catedrático de Astronomía. Se casó con una matemática y física, Bertha Swirles, en 1940.

Jeffreys desarrolló una teoría lógico deductiva de la probabilidad, para contrastar hipótesis científicas y para resolver problemas que se presentan, relacionados con el análisis de datos, en las ciencias experimentales. Las ideas de Jeffreys están contenidas en su libro *Theory of Probability* y consisten en admitir ciertos axiomas que llevan al cálculo de probabilidades y al teorema de Bayes. Rechaza la interpretación frecuentista de la probabilidad, deduce lo que se conoce como *regla de Jeffreys* para representar poca información inicial, basándose en consideraciones de invariancia:

$$\pi(\theta) = \sqrt{I_n(\theta)},$$

donde  $I_n(\theta)$  es la llamada *información de Fisher* para muestras aleatorio simples de tamaño  $n$ ; la esperanza del cuadrado de la derivada respecto al parámetro del logaritmo de la función de verosimilitud. Esta distribución inicial, tiene la propiedad de que permanece igual, aunque se haga una transformación de la parametrización (técnicamente una transformación regular).

Introduce Jeffreys también el concepto de *factor Bayes* para los contrastes de hipótesis, e introduce distribuciones mixtas para contrastar hipótesis que tengan menor dimensión que la dimensión del espacio paramétrico.

El otro estadístico, que contribuye a que la aproximación bayesiana vuelva a ocupar el valor que le corresponde, es Bruno de Finetti. Nace en Innsbruck (Austria) en 1906 de padres italianos; su padre era ingeniero y trabajaba en la construcción del ferrocarril. Estudió primaria y secundaria en Trento, lugar de origen de su madre, a donde se trasladó con ella, tras la prematura muerte de su

padre. Ingresó posteriormente en el recientemente creado Instituto Politécnico de Milán, pero tras dos años de estudios, se trasladó a la Universidad de Milán, por la que se licenció en Matemáticas en 1927. En una carta a su madre escribe:

*Las matemáticas no son un campo totalmente explorado, sólo para ser aprendidas y pasar a la posteridad como están, siempre están en progreso, enriqueciéndose e iluminándose, son una criatura viva y vital, en total desarrollo y por estas razones yo las amo, las estudio y deseo dedicar mi vida a ellas.*

Un primer trabajo de de Finetti sobre herencia mendeliana (en 1926) llamó la atención de Conrado Gini, quien le propuso como director de la oficina matemática del *Instituto Centrale di Statistica* en Roma. Los cuatro primeros años en la capital italiana, de 1927 a 1931, constituyen la época en la que aparecen sus grandes aportaciones originales, contemporáneas de las de Kolmogorov, Levi, Fisher o Cantelli. Así en 1928 presenta *Funzione Caratteristica di un Fenomeno Aleatorio* ante el Congreso Internacional de Matemáticas de Bolonia, un trabajo que contiene su concepto de intercambiabilidad; en la audiencia destacan Borel, Cantelli, Darmois, Fisher, Fréchet, Khintchine, Lévi, Neyman y Polya. En 1946 obtiene una cátedra en la Universidad de Trieste. Su estancia en Trieste, de 1931 a 1954, coincide con el desarrollo de su imagen internacional. Su trabajo más conocido es, *La Prevision, ses Lois Logiques, ses Sources Subjectives* (1937), que contiene el desarrollo matemático formal de la probabilidad como grado de creencia y el teorema de representación de variables dicotómicas intercambiables. En 1950 es invitado al segundo Simposio de Berkeley, donde presenta un trabajo sobre métodos bayesianos robustos. En 1952, es invitado a visitar Chicago; es el principio de una larga y fructífera colaboración con Leonard (Jimmie) Savage. En 1954 obtiene una cátedra en la Facultad de Economía de la Universidad de Roma y en 1961 obtiene la de la Facultad de Ciencias de la misma universidad, en la que permanecerá hasta su jubilación en 1976. En 1970 aparece su obra magna, la *Teoria delle Probabilità* donde sintetiza sus ideas sobre probabilidad y estadística, y que ha sido traducida al inglés y al alemán. Poco después, a propuesta de Jimmie Savage, publica *Probability, Induction and Statistics* en 1972, que es una versión en inglés, -ampliada, corregida y reestructurada por el autor-, de importantes trabajos suyos originalmente publicados en italiano entre 1949 y 1967. Su conferencia invitada en el congreso del *International Statistical Institute* celebrado en Viena en 1973, constituye una lúcida descripción del papel unificador de los métodos bayesianos en los fundamentos y en las aplicaciones de la estadística. Tres años más tarde, ante la *First European Conference on New Developments and Applications of Bayesian Methods*, —la primera conferencia internacional sobre métodos bayesianos que tuvo lugar en el mundo—, celebrada en Fontainebleau en Junio de 1976, de Finetti analiza el problema de las probabilidades de orden superior. Bruno de Finetti muere en Roma en 1985.

Un estudio sobre la vida y la contribución a la estadística de de Finetti, puede verse en Bernardo (1998). Casi toda la contribución de de Finetti puede verse en (de Finetti 1937, 1972, 1974 y 1975).

La contribución fundamental de de Finetti es, como ya se ha dicho, la noción de *intercambiabilidad*, noción más general que la de independencia y que permite justificar la aproximación bayesiana y los modelos jerárquicos, y su relación con los métodos frecuentistas.

La noción de muestra aleatorio simple, es ahora perfectamente natural dentro de la inferencia estadística y quiere decir que la distribución de la muestra puede escribirse como, con notación de función de densidad:

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) \dots f(x_n | \theta)$$

Sin embargo, con esta definición, cuyo sentido es conseguir que las matemáticas de la inferencia sean más simples, puede ocurrir que observemos repetidamente el mismo valor  $x_i$ , lo que obviamente es absurdo. La noción lógica a utilizar es la de observaciones *intercambiables*; la colección  $(x_1, \dots, x_n)$  es intercambiable cuándo su distribución

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

para cualquier permutación  $\pi$  de los  $n$  elementos. Es decir, la distribución de la muestra, sólo depende de los elementos que la componen. Es evidente que el concepto de *intercambiabilidad* es más débil que el concepto de *independencia*; lo más importante es que se demuestra, que, si la colección  $(x_1, \dots, x_n)$  es intercambiable, la distribución conjunta se puede factorizar en la forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\Theta} \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \pi(\theta) d\theta,$$

donde la distribución del parámetro  $\pi(\theta)$  se puede obtener mediante límite de la distribución empírica de la muestra. Un desarrollo más preciso de estas ideas está contenido en *Bayesian Theory* (1994) página 177.

Este resultado justifica los modelos jerárquicos bayesianos donde las observaciones  $x_i | \theta$  se comportan como variables independientes e idénticamente distribuidas, condicionalmente a  $\theta$ , y el parámetro  $\theta$  tiene una distribución inicial dada por  $\pi(\theta)$ .

La siguiente contribución a la aproximación bayesiana a la inferencia se debe a L. Savage (1917-1971) y otros, pero ya se puede decir que a partir de las contribuciones de Jeffreys y de Finetti la aproximación bayesiana ha recuperado la posición que nunca debió perder.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en parte con ayudas del Ministerio de Ciencia e Innovación, proyecto MTM2008-03282 y de la Universidad Complutense de Madrid-BSCH, proyecto 910395.

## Bibliografía

- BAYES, T. (1764): *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*. Philos. Trans. R. Soc. London, 53, 370-418, Reeditado por Deeming (1940) en *Biometrika*, 45, 293-315. Traducido al alemán con un comentario por Timerding (1908). Traducido al francés por Cléro (1988). Traducido al castellano por Gómez Villegas, et als. (2001), en *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. (esp.)*, 95, 1-2, 63-80.
- BERNARDO, J. M. (1998): “Bruno de Finetti en la Estadística Contemporánea”. En *Historia de la Matemática en el siglo XX*, *Rev. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat.*, Madrid, 63-80.
- BERNARDO, J. M. and SMITH, A. F. M. (1994): *Bayesian Theory*. London: John Wiley.
- DE FINETTI, B. (1937): “Foresight: its logical laws, its subjective sources”. Reprinted in *Studies in Subjective Probability, 2nd edition*, 1980 (H. Kyburg and Smokler, eds.), 53-118, London: John Wiley.
- (1972): *Probability, Induction and Statistics*. London: John Wiley.
  - (1974): *Theory of Probability. Volume 1*. London: John Wiley.
  - (1975): *Theory of Probability. Volume 2*. London: John Wiley.
- FISHER, R. A. (1930): *The Genetical Theory of Natural Selection*. London: Oxford University Press, (Reprinted by Oxford University Press, Oxford, 1990).
- (1935): *The Design of Experiments*. Edinburg: Oliver & Boyd, (Reprinted by Oxford University Press, Oxford, 1990).
  - (1956): *Statistical Methods and Scientific Inference*. Edinburg: Oliver & Boyd, (Reprinted by Oxford University Press, Oxford, 1990).
- GIRÓN, F. J. y GÓMEZ VILLEGAS, M. A. (1998): “R. A. Fisher: su contribución a la ciencia estadística”. Editado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en *Historia de la Matemática en el Siglo XX*, Madrid, 43-61.
- GÓMEZ VILLEGAS, M. A. (2001): El “Ensayo Encaminado a resolver un problema en la Doctrina del Azar”, *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fisi. Nat. (esp.)*, 95, 1-2, 81-85.
- (1994): “El problema de la probabilidad inversa: Bayes y Laplace”. Editado por E. Bustos y otros en *Perspectivas Actuales de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, Ed. Siglo XXI: Madrid, 385-396.
  - (2005): *Inferencia Estadística*. Madrid: Daz de Santos.

- GÓMEZ VILLEGAS, M. A., GIRÓN, F. J., MARTÍNEZ, M. L. y RIOS, D. (2001): "Un ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina de azar". *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fisi. Nat.*, 95, 1-2, 63-80.
- JEFFREYS, H. (1939, 1948, 1956): *Theory of Probability*, Oxford: Oxford University Press.
- LAPLACE, P. S. (1774): "Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements". *Memoires de l'Academie Royale des Sciences Presents Par Divers Savans*, 6, 621-656.
- (1812): *Théorie Analytique des probabilités*. Paris: Courcier.
- PEARSON, K. (1905): "On the general theory of skew correlation and non linear regression". *Draper's Company Research Memoirs*, (Reprinted in Karl Pearson's Early Statistical Papers), Cambridge: Cambridge University Press),(first issued 1948), 477-528.
- STIGLER, S. M. (1986): *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. Cambridge: Belknap Harvard.



## CAPÍTULO 15

# Visión histórica sobre el control estadístico de revelación. Un panorama sobre la estadística pública

ANTONIO HERNÁNDEZ MORENO  
Instituto de Estadística de Andalucía

### Introducción

A lo largo de la historia, los organismos oficiales de Estadística Pública han ido realizando operaciones estadísticas para poder satisfacer una serie de necesidades de información que anteriormente se han definido.

El procedimiento habitual surge de la detección de dicha necesidad de información, que una vez era determinada, se diseñaba, realizaba, depuraba, de forma que se pudiera asegurar su calidad y por último se difundía, de igual forma que podemos decir que ocurre en la actualidad.

Pero centrándonos en el último campo que se ha nombrado, el de la difusión de la estadísticas públicas realizadas, ésta ha tenido una clara evolución histórica dada

por las mejoras en los distintos medios utilizados, ya sean medios físicos o computacionales.

En los primeros tiempos modernos, el papel era el medio común y habitual de difusión, y casi el único en ofrecer los resultados de una operación estadística. Concretamente se decidían cuáles eran las tablas que debían ser de interés y que eran las generadoras de la necesidad de información, con sus cruces de variables correspondientes y se procedía a publicarlas en libros, folletos u otro tipo de publicaciones. Pero evidentemente presenta un grave problema de no optimización en la explotación de los resultados de una encuesta, pues generalmente se le puede extraer mucha más cantidad de información a la citada operación estadística que la presentada en las tablas publicadas, simplemente por una limitación física.

Sin embargo, los adelantos en el manejo de la información han hecho que el papel deje de ser la forma prioritaria de publicación de resultados, ya que con el acceso a dispositivos de almacenamiento ópticos y sobre todo con la aparición de internet, hace que el manejo de la información sea mucho más cómodo y sobretodo accesible. En concreto se han difundido resultados en CD, DVD y otros medios de almacenamiento, en especial a través de las páginas webs de los distintos organismos de estadística pública. En la actualidad las tablas decididas en el plan de explotación se hacen públicas a través de distintos formatos de descarga y visualización a través de Internet. Pero en todo caso, se mantenía, y se mantiene en muchos casos, la misma filosofía que en el caso del papel, es decir, se seguían determinando de antemano las tablas que eran de interés, y esas eran las que se publicaban.

Ahora bien, durante los últimos años, las mejoras computacionales y de comunicaciones han sido aún más importantes consiguiendo cambiar dicha filosofía existente y que limitaba la explotación de una encuesta a la *visión* de unos datos en unas tablas predeterminadas. En este caso, si un investigador quisiera obtener una explotación distinta a las publicadas y que se pudiera obtener a través de la operación estadística en cuestión, sólo tenía la opción de pedir dicha explotación al organismo portador de los datos, que no siempre podría satisfacer dichas demandas.

Como hemos comentado, se abre una nueva filosofía, que concretamente abarca dos soluciones principales:

- a) Publicación de los propios **Microdatos** de una operación estadística: esta solución consiste en poner a disposición de cualquier investigador y del público en general los microdatos de una encuesta y de su correspondiente diseño de registro, para que ellos a través de su propia explotación lleguen a obtener las tablas deseadas. La descarga se produce por medio de Internet habitualmente a través de servidores ftp. Generalmente permite descargar los datos en formato texto, que acompañados con su correspondiente

diseño de registro posibilita a los investigadores su exportación a cualquier paquete estadístico o sistema gestor de bases de datos.

- b) Herramientas de Business Intelligence o Data Warehouse: es la última solución que está comenzando a implantarse en los organismos de estadística pública, en los conocidos como bancos de datos. Consiste en proporcionar vía web una herramienta on-line que permita hacer explotaciones a medida. En última instancia, su resultado sigue siendo una tabla, pero fabricada ad-hoc por el investigador. Las complicaciones que tienen estas últimas soluciones hacen que su campo de investigación actual sea muy amplio.

En todos los posibles tipos de difusión de resultados que se han presentado hay que tener presente un problema que les va a afectar a todas ellas aunque de forma muy distinta y que además les afecta, como veremos, de forma obligada, y que no es más que el control del anonimato, o como lo llamaremos nosotros el **control estadístico de revelación (SDC – siglas de Statistical Disclosure Control)**.

Como una mera introducción, entenderemos que se cumplen las condiciones de control de revelación estadístico si cuando trabajamos con microdatos una persona que investigue los datos y que llamaremos intruso no sea capaz de determinar la identidad de los informantes. De igual forma, diremos que las cumple en el caso de trabajar con tablas agregadas si el intruso no es capaz de determinar las personas que se encuadran en cada una de las celdas de la tabla en cuestión.

Dicho control estadístico de revelación hemos comentado que hay que asegurarlo de una forma obligada, y es así entre otras cosas por ley, ya que hay dos leyes que impactan de lleno en la difusión de los resultados de estadísticas y en el control del anonimato, y que son:

- a) LO 15/1999 de 13 Diciembre de Protección de Datos de Carácter Personal (LOPD). Esta ley afecta a datos no solamente estadístico sino los pertenecientes a cualquier entidad y base de datos con datos personales sensibles. Afecta de distinta forma según sean los temas preguntados en la operación estadística, definiendo distintos tipos de seguridad, pero en todos los casos debe preservarse el anonimato.
- b) Ley 12/1989 de 9 de Mayo, Ley de Función Estadística Pública sobre el Secreto Estadístico y que en Andalucía queda reflejada en la actualidad en el Plan Estadístico de Andalucía 2007-2010. Esta ley sólo afecta a datos de tipo estadístico, y a las personas que trabajan con ellos, siendo menos restrictiva que la anterior.

Como se ha comentado, el control estadístico de revelación (SDC) afecta de muy distinta forma a cada uno de los casos presentados tal y como se irá desglosando a partir de ahora.

Pero, ¿Qué es revelación?, pues bien, una primera definición sería la manifestación de una verdad oculta o secreta, y si lo relacionamos con la difusión estadística, la podemos definir como la deducción de la identidad de un individuo en el manejo de los datos estadísticos sujetos a LOPD y secreto estadístico.

Todas las técnicas de SDC se sostienen en una lucha interna entre la calidad (datos lo más parecidos posibles a la realidad que quieren reflejar) y el anonimato que se pretende conseguir, ya que para obtenerlo, habrá que modificar de alguna manera los datos.

A lo largo del artículo vamos a distinguir dos tipos de técnicas principales de control estadístico de revelación, según sea el tipo de datos a los que les aplicamos dichas técnicas, ya que se comprueba que les afecta de distinta forma a cada uno de los casos, siendo a su vez la metodología de las técnicas sensiblemente distintas. Podemos por tanto dividir las en:

- Técnicas aplicadas a tablas agregadas, donde el problema está resuelto de forma óptima para tablas bidimensionales pero no para el resto de dimensiones.
- Técnicas aplicadas a microdatos: presenta diversas soluciones, problemas de eficiencia computacionales.

Como hemos indicado se produce una lucha interna en los datos al aplicar técnicas de control estadístico de revelación, ya que estas técnicas producen de alguna forma una modificación en los datos, produciendo lo que vamos a llamar pérdida de información. El objetivo lógicamente de una técnica de control estadístico de revelación no será otro que maximizar el anonimato y seguridad de los datos, minimizando tal pérdida de información, por lo que se plantea un nuevo problema que no es otro que cuantificar la pérdida de información, para poder así minimizarla. Usaremos una medida de entropía, que mide la pérdida de información en sistemas.

## **Impacto analítico técnicas SDC**

Pero vamos a analizar por separado cada uno casos con los que se va a trabajar.

En el caso de querer obtener y aplicar técnicas SDC a microdatos hay que explicar brevemente una serie de conceptos previos, que son:

- Escenario de revelación: son las condiciones bajo las cuales el intruso quiere realizar su ataque, por ejemplo, ¿cuál es la información de la que dispone?. El intruso puede disponer de información de muy diverso tipo. Generalmente si un organismo público pone los microdatos de una encuesta a disposición de los investigadores, también pondrá los de otras encuestas o censos de forma que puede usarlo como información auxiliar. Además en

los cuadernos de metodología también puede obtener información sobre todo el muestreo que se les ha realizado a los datos. El escenario de revelación exige además que los microdatos se dividan en tres grandes grupos. El primero  $x_1, \dots, x_p$ , que son las variables que están en los microdatos y también en otras fuentes de las que puede disponer el intruso, por ejemplo procedentes de un registro administrativo o de otra fuente de microdatos que haya podido descargar. Otro grupo,  $y_1, \dots, y_q$ , de variables que sólo están en los microdatos, y por último, otro tipo de variables, que pueden ser autocalculadas o de otro tipo.

- Unidad diana: unidad sobre la que el intruso quiere desvelar su identidad.
- Reidentificación: cuando efectivamente el intruso consigue determinar la identidad de la unidad diana.
- Riesgo de reidentificación: debemos de alguna forma cuantificar cual es la probabilidad de que el intruso llegue a la reidentificación. Una probabilidad con la que conseguimos esto es:  $P[I = Id(i)/X, X_s]$ , donde  $Id(s)$  es la serie de identificadores de una unidad,  $X_s$  es la información adicional de la que dispone el intruso, y  $X$  son los datos. Es decir, dicha probabilidad mide la probabilidad de que una unidad será reidentificada condicionando a los datos que disponemos y la información de la que dispone el intruso.

Esta probabilidad de reidentificación a partir del uso de información proveniente de otras fuentes, está fuertemente relacionada (en verdad se puede calcular a partir de ella) con el concepto de razón de probabilidad del campo de la fusión de ficheros o Record Linkage. Recordemos que el objetivo del Record Linkage no es más que el contrario que el del control estadístico de revelación en microdatos, pero desde una perspectiva de que el intruso tiene un “*buen fin*”. En verdad, pretende unir diversas fuentes de datos en las que están en teoría presentes los mismos individuos, que funcionarán como unidades diana. La razón de probabilidad del RL es la que determina si cada par de comparaciones realizadas entre las distintas fuentes son lo que se denomina un enlace o no lo son. Por lo tanto, podemos ver el RL y las técnicas de control de revelación como las dos caras de una misma moneda.

Pero, aparte de en una obvia pérdida de información (que en el caso de los microdatos no es tan importante de determinar), ¿en qué afecta analíticamente las técnicas de SDC en microdatos? Sus efectos son evidentemente negativos, ya que se puede demostrar que aumenta la varianza y el sesgo de las estimaciones, convirtiendo en ocasiones en inestimables algunos parámetros. De todas formas, se han conseguido diseñar técnicas, como veremos, donde ese impacto es el menos dañino posible. Estas características hacen que este campo esté abierto para posibles investigaciones.

De igual forma que se ha hecho en el caso de los microdatos vamos a introducir una serie de conceptos previos a analizar el impacto analítico de las técnicas SDC sobre tablas agregadas.

- Sensibilidad y celdas sensibles: las celdas sensibles son aquellas que queremos proteger por alguna razón y/o tienen un riesgo de reidentificación alto. Generalmente, y como veremos en la exposición de las técnicas en sí, estas celdas o son modificadas o directamente son eliminadas de la tabla.
- Reglas de sensibilidad: a la hora de decidir qué celda es sensible o no, hay determinadas reglas. La más usada es la llamada regla de  $(n,k)$  dominancia, que considera que una celda es sensible si una medida de sensibilidad  $S_n(x)$  que generalmente se considera lineal (en este caso, es lineal ponderada) es mayor que un valor  $k$ , predeterminado. Otra regla es la regla previo-posterior, la cual funciona de forma análoga a la anterior ( $p$  hace de  $k$ ), pero teniendo en cuenta que el intruso dispone de algún tipo de información previa acerca de las contribuciones de los respondientes.

Una vez que se han determinado qué celdas son sensibles ya estamos en condiciones de aplicar técnicas SDC a las tablas agregadas, que como se ha comentado produce una pérdida de información. Para medir dicha pérdida de información se dispone de varios enfoques. El primero basado que en cada celda tenga un peso, de tal forma que minimizar dicha pérdida se convierte en un problema de sencilla resolución para el caso bidimensional. Otro segundo, basado en entropía de igual forma que ocurría en el caso de trabajar con microdatos.

## **Técnicas SDC aplicadas a microdatos**

Hasta ahora se ha visto la evolución de la difusión estadística, el problema del anonimato y los problemas analíticos que producen la aplicación de técnicas de control de revelación tanto a microdatos como a tablas agregadas, pero sin llegar a describir ninguna de las técnicas en concreto. A partir de ahora se van a presentar dichas técnicas. Comenzamos como hasta ahora con el caso de los microdatos.

Las técnicas SDC para microdatos se van a dividir en dos grandes grupos, según si las mismas aplican o no algún tipo de perturbación (aleatoria o determinística) a los datos.

Dentro del grupo de técnicas no perturbadoras tenemos desde las más sencillas y primitivas, en donde las ayudas computacionales no eran necesarias y su aplicación se podía hacer directamente casi con cualquier editor de datos (casos a), b), c)) a otras técnicas más avanzadas tanto conceptualmente como computacionalmente.

- a) Recodificación global / local: a través de la combinación de categorías de variables.

- b) Supresión local: elimina los valores de las variables a proteger en las unidades diana y les aplica procesos de imputación, ya que los considera como valores perdidos.
- c) Mixtura: se pueden aplicar las dos a la vez, pero con un orden claro, primero la recodificación y luego la supresión local, una vez que las categorías han sido bien definidas.
- d) Datos sintéticos: se podría pensar en la sustitución de la variable completa por otra proveniente de ajustar un modelo de estimación de la variable original, creando por lo tanto datos sintéticos.
- e) Submuestreo o remuestreo: implica no hacer públicos todos los datos, de forma que luego se les pueda aplicar procedimientos de remuestreo o submuestreo como Bootstrap.

Y dentro de las perturbadoras tenemos:

- a) Técnicas de redondeo: que puede estar basado en técnicas determinísticas o aleatorias (difieren según si el redondeo se quiere hacer sobre sólo una variable o sobre varias)
- b) Reajuste de pesos: Si el intruso dispone como información del tipo de muestreo que se ha aplicado al marco podría realizar dicho muestreo en sentido contrario, de forma que a partir de los pesos, pueda determinar las probabilidades de inclusión de las unidades muestrales, que unidas con el cruce con las variables de información necesarias en el muestreo y puedan llevar a la reidentificación. Estos métodos modifican dichos pesos de forma que el muestreo no pueda ser fácilmente llevado hacia atrás, impidiendo la reidentificación.
- c) Técnicas de microagregación basadas en k-anonimato: son el grupo de técnicas más eficientes y de hecho son las que están implementadas en las diferentes soluciones computacionales. De hecho, se pueden considerar un estándar como solución al problema del control estadístico de revelación para microdatos. Tiene diversas formas de actuación, pero básicamente consisten en agregar vectores de variables continuas según diversos criterios, como pueden ser, los de distancia máxima, distancia máxima al vector promedio (MDVA) y la distancia máxima al vector promedio de tamaño variable. El MDVA es la solución implementada en casi todas las soluciones computacionales de técnicas SDC a microdatos, pero se ha demostrado (Solanas) que no es la más eficiente ya que en términos de eficiencia la distancia máxima al vector promedio de tamaño variable presenta mejores resultados. Veamos rápidamente como funciona el MDAV, ya que es el más usado en la práctica.

- 1) Determinar k (tamaño de la agregación).

- 2) Calcular el centroide de los datos.
- 3) Seleccionar el punto más lejano del centroide  $x_r$ .
- 4) Calcular todas las distancias desde  $x_r$  al resto de los puntos.
- 5) Se selecciona el punto más lejano a  $x_r$ ,  $x_s$ .
- 6) Se seleccionan los  $k-1$  puntos más cercanos a  $x_r$  y  $x_s$ .
- 7) Se microagregan en torno a su centroide.
- 8) Se itera el proceso.

Se ha descrito el algoritmo de este procedimiento ya que se trata en realidad de un estándar sobre las técnicas de anonimización aplicadas a microdatos, aunque en la actualidad se estén desarrollando otras técnicas que mejoran en eficiencia la descrita, como por ejemplo ocurre con el método de la distancia máxima al vector promedio de tamaño variable.

Estas técnicas combinan conceptos de investigación operativa, datos multivariantes y las propias de anonimización.

## **Técnicas SDC aplicadas a tablas agregadas**

Respecto a las técnicas de anonimato en tablas agregadas tenemos que comenzar planteándonos una medida de sensibilidad, que anteriormente presentamos, que nos permita determinar las celdas sensibles. Una vez que éstas han sido determinadas, vamos a encontrarnos con que el problema está resuelto de forma óptima para el caso de trabajar con tablas bidimensionales, pero todavía no de forma genérica cuando trabajamos con tablas de más de 2 dimensiones. Pero comencemos viendo las técnicas, que de nuevo se dividen en técnicas perturbadoras o no perturbadoras.

Dentro de las no perturbadoras tenemos:

- a) Rediseño de tablas: Por ejemplo a través de la agrupación de categorías.
- b) Supresión de celdas secundaria: una vez que se eliminan las celdas que se han determinado sensibles, se crea un intervalo de confianza que indica si tenemos que eliminar o no cada una de las celdas secundarias. Este problema se conoce como el problema de supresión de celda secundaria, cuya solución óptima se presenta con el nombre de método de supresión hipercúbica que vemos a continuación.
- c) Método de supresión hipercúbica: es un caso particular de la supresión de celda secundaria de que busca minimizar la cantidad de pérdida de información. Resuelve el problema como un problema de programación entera mixta, usando generalmente un peso para cada una de las celdas

secundarias. A lo largo de la historia ha tenido diversas soluciones como las proporcionadas por los modelos de Lougee-Heimer (1989), el modelo de Kelly (1990), el modelo de Geurts (1992), llegándose a la óptima en el trabajo de Fischetti – Salazar (1998), donde se reduce notablemente el número de restricciones y variables del problema a resolver. La solución de Fischetti – Salazar es la implementada en el software  $\tau$ -ARGUS, que es la solución computacional de referencia, como veremos posteriormente. Como ocurría en el caso de microdatos, encontramos en el modelo de Fischetti – Salazar un estándar en la solución de este problema en el caso de tablas agregadas, pero sólo lo hace para tablas de dimensión 2. En el caso de trabajar con más dimensiones, no se puede obtener en la actualidad un modelo que generalice la solución por lo que habría que estudiar cada uno de las tablas en concreto de forma individual, que generalmente, siempre que no haya muchas dimensiones se podrá resolver.

Y dentro de las técnicas perturbadoras.

- a) Adición de ruido: pretende construir una nueva variable a través de la original y la introducción de una perturbación, ya sea aditiva  $a' = a + e$  o multiplicativa  $a' = a \cdot e$  de forma que no se introduzca el menor sesgo en las estimaciones. Para ello, si es el caso aditivo, evidentemente  $E[e] = 0$  y en el caso multiplicativo  $E[e] = 1$ .
- b) Redondeo: puede realizarse sin restricciones o de forma controlada. En el primero de ellos, se determina una base a la que redondear, o según unas probabilidades (que podrían ser fijas o no) se redondea a  $b$  o  $b+1$ . También hay redondeos controlados que aseguran resultados insesgados, como es el caso del redondeo insesgado aleatorio.

En el caso de trabajar con tablas agregadas las soluciones no perturbadoras toman ventaja sobre las perturbadoras, hecho contrario que cuando los datos se muestran a través de microdatos.

## Soluciones computacionales

Hasta ahora se ha hecho un recorrido por las técnicas que históricamente han marcado el campo de la anonimización de datos. Dicho recorrido se ha realizado desde un marcado carácter teórico, pero en el mundo de la estadística oficial para poder resolver los problemas que se presentan necesitamos de la ayuda de distintas soluciones computacionales. En muchos casos, las técnicas son algorítmicas y se pueden implementar de forma aislada en cualquier lenguaje de programación. Pero nuestro objetivo no debe ser ese, sino disponer de herramientas que resuelvan los problemas de control estadístico de revelación desde un punto de vista integral.

1.-  $\mu$ -ARGUS y  $\tau$ -ARGUS: son las herramientas del proyecto CASC, proyecto de Eurostat para el tratamiento de la confidencialidad de los resultados de las operaciones estadísticas y que está basado en la cooperación de diversos institutos nacionales de estadística y diversas universidades. En el caso de España, colaboran activamente con este proyecto el Instituto Nacional de Estadística y la Universidad Rovira y Virgili.

ARGUS son las siglas de *Anti Reidentification General Utility System*. Poseen una interfaz y un manejo bastante riguroso, permitiendo poca manejabilidad. También su trabajo con formatos es estricto, por lo que es complicado lanzarlo debido a sus especificaciones, que proporcionan poca flexibilidad. Su versión  $\mu$ -ARGUS está diseñada para solucionar el caso de anonimización en microdatos. La técnica básica que utiliza es la de MDAV, aunque también trabaja con otras más sencillas como la recodificación y la modificación de datos.

Su “hermano”  $\tau$ -ARGUS, es la solución diseñada para el caso de trabajar con tablas agregadas bidimensionales, usando para resolver dicho problema la que anteriormente nombramos como solución óptima y que recordemos que fue dada por Fischetti y Salazar, para tablas bidimensionales.

2.- Software R: R es una herramienta de estadística basada en la filosofía de software libre y que cada vez tiene más usuarios y desarrolladores. Está basada en la creación de paquetes de libre desarrollo que resuelvan diversos problemas. En este caso, se plantea como problema implementar técnicas de SDC. En los paquetes propios de SDC tiene implementadas diversas soluciones a cada uno de los problemas tratados, pero con diferencias, ya que mientras en el caso de trabajar con microdatos la solución está específicamente implementada, en el caso de tablas agregadas nos redirecciona a resolver el problema de programación entera mixta del que proviene y que sí puede resolver.

En el caso de trabajar con microdatos, también las técnicas de microagregación copan los resultados más importantes, aunque presenta mayor variedad que en el caso de  $\mu$ -ARGUS, ya que aparte del MDAV, presenta la agregación simple, y otras basadas en rotaciones multivariantes de la solución.

3.- Datafly System II y Scrubs System: desarrollados por Latanya Sweney. Usa MDAV para resolver el problema de los microdatos en el desarrollo de su tesis doctoral. La aplicación está especializada en resolver casos en bases de datos de tipo médico. En el caso del Scrubs System, trabaja sobre reidentificaciones sobre documentos de texto sin restricciones, caso que escapa al de nuestro estudio.

## Conclusiones

Para terminar, veamos donde podemos encuadrar todo el amplio espectro del control estadístico de revelación dentro del uso de la estadística pública. Para ello

vamos primero a presentar dos de las modalidades que la estadística pública y en concreto el Instituto de Estadística de Andalucía está potenciando en la actualidad como son el trabajo con datos en área pequeña y las herramientas de Data Warehouse como es el *Banco de Datos Estadístico de Andalucía* (BADEA). El primer caso surge de la constante petición por parte de las distintas entidades locales de cada vez mayor cantidad de información. Las estadísticas actuales generalmente no permiten desagregar a tan bajos niveles de desagregación geográfica, y por eso se plantea potenciarlo. Es obvio que el problema de la anonimización en estos casos se hace más complejo ya que el riesgo de reidentificación se hace mayor ya que tenemos menos población en nuestro marco, y la probabilidad de enlace será mayor, pero la filosofía para resolverlo no debe cambiar, ya que se sigue resumiendo en resolver los problemas clásicos de control de revelación ya sea en tablas y en microdatos, pero trabajando con un riesgo de reidentificación mayor.

BADEA, por el contrario, se plantea como una herramienta de Data Warehouse en la que el usuario puede conseguir rápidamente el cruce de las variables que desee. Al poder trabajar con más de dos variables, no tenemos en todos los casos asegurada la solución óptima, como antes vimos, por lo que deja campo abierto para la investigación.

Por lo tanto dentro de la estadística pública se plantean dos vertientes sobre el control estadístico de revelación, con dos fuentes claras de investigación, como son la de obtener datos seguros dentro de BADEA y el de la aplicación sistemática de algoritmos que permitan obtener resultados cada vez más óptimos en sus trabajos sobre microdatos.

## Bibliografía

- COX, L. (2000): *Confidencialidad y técnicas estadísticas de protección de datos*. Seminario Internacional de Estadística en Euskadi 2000. N°40 EUSTAT.
- DOMINGO-FERRER, J. (2002): *Inference control in statistical databases. From Theory to practice*. Lectures Notes in Computer Science. Springer.
- DOMINGO-FERRER, J. y TORRA, V. (2003): “Disclosure Risk Assessment in Statistical Microdata Protection Via Advanced Record Linkage”. *Statistical and Computing*, 13. Kluwer Academic Publishers.
- (2004): “Privacy in Statistical Databases”. *Lecture Notes In Computer Science*, N° 3050 Springer.
- FISCHETTI, M. y SALAZAR-GONZÁLEZ, J. J. (1998): “Partial Cell Suppression: A new methodology for SDC”. *Report University La Laguna*. Tenerife, 203.

- HANDEPOOL, A., VAN DE WETERING, A., DE WOLF, P. P., GIESSING, S., FISCHETTI, M., SALAZAR-GONZÁLEZ, J. J. y CAPRARA, A. (2002): *User's Manual  $\tau$ -ARGUS 3.2*. Cenex-project. Statistics Netherlands. Voorburg.
- HANDEPOOL, A., VAN DE WETERING, A., RAMASWANY, R., FRANCONI, L., CAPOBIANCHI, A., DE WOLF, P. P., DOMIGO-FERRER, J., TORRA, V., GIESSING, S. y BRAND, R. (2002): *User's Manual  $\mu$ - ARGUS 4.1*. Cenex-project. Statistics Netherlands. Voorburg.
- SOLANAS, A., MARTÍNEZ-BALLESTÉ, A., DOMINGO-FERRER, J., BUJALANCE, S. y MATEO-SANZ, J. (2006): "Métodos de microagregación para k-anonimato: privacidad en bases de datos". Departamento de Ingeniería Informática y Matemáticas. Universidad Rovira y Virgili. *Actas de la Reunión Española sobre Criptografía y Seguridad Informática (RECSI)*, 539-547.
- SWEENEY, L. (2002): "Achieving k-anonymity Privacy Protection Using Generalization and Suppression". *International Journal on Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based system*, 10 (5), 571-588.
- (1997): *Computational Disclosure Control for Medical Microdata: The Datafly System*. Record Linkage Workshop. Bureau of the Census. Washington.
  - (2002): "K-anonymity: a Model for Protecting Privacy". *International Journal on Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based system*, 10 (5), 557-570.
- TEMPL, M. (2007): *sdcMicro: a new Exible R-package for the Generation of Anonymised Microdata: Design Issues and new Methods*. Joint UNECE/Eurostat Work Session on Statistical Data Confidentiality. Monographs of Official Statistics.
- (2008): "Statistical Disclosure Control for Microdata using the R-package sdcMicro". *Transactions on Data Privacy*, 1, 67-85.
- WILLENBORG, L. y DE WAAL, T. (2000): "Elements of Statistical Disclosure Control". *Lecture Notes in Statistics*, N° 155. Springer.

## CAPÍTULO 16

# Orígenes y evolución de la teoría de la cointegración y del análisis de la transmisión de precios en mercados

RAMÓN JIMÉNEZ TORIBIO  
JOSÉ JUAN GARCÍA DEL HOYO  
Universidad de Huelva

### Introducción

La cointegración es una técnica de análisis de series temporales de reciente aparición. El concepto de cointegración lo introdujo Granger (1981) y, posteriormente, se estudió en mayor profundidad en Engle y Granger (1987), Engle y Yoo (1987), Phillips y Ouliaris (1990), Phillips (1991) y Johansen (1988). Esta técnica surge como procedimiento que permite discriminar entre relaciones reales y relaciones espurias entre variables. Yule (1926) advirtió del “problema de la regresión espuria”. Una regresión espuria surge cuando tratamos de relacionar dos variables entre las que no existe ningún tipo de relación causa-efecto mediante una regresión y se

concluye erróneamente, tras la regresión, que tal relación existe. Con posterioridad a Yule, Granger y Newbold (1974) señalaron que una de las características que presentan las relaciones espurias consiste en tener un coeficiente de determinación muy elevado y un estadístico de Durbin-Watson muy próximo a cero.

En definitiva, la cointegración permite que una combinación de variables no estacionarias, que en general será no estacionaria, resulte ser estacionaria. Desde un punto de vista económico, la cointegración se puede ver como una relación de equilibrio a largo plazo entre variables de tal modo que dichas variables se pueden desviar de la situación de equilibrio en el corto plazo, pero con el paso del tiempo retornarán al equilibrio.

El objetivo de este trabajo es analizar los orígenes y la evolución de la teoría de la cointegración y, posteriormente, estudiar cómo se ha ido aplicando y extendiendo esta metodología econométrica en los trabajos sobre transmisión de precios en mercados para analizar tanto relaciones horizontales como verticales entre precios. En particular, con la cointegración se podría analizar las relaciones de sustitución existentes entre productos pesqueros, siendo especialmente interesante el estudio de la interacción de productos de la acuicultura con los procedentes de bancos naturales, y las interrelaciones del mercado pesquero español con otros mercados del mundo. Además, se podría analizar cómo se transmiten los precios de determinados productos pesqueros por la cadena de comercialización.

De este modo, el artículo se va a desarrollar del siguiente modo. En primer lugar, se comentarán los orígenes y la evolución de la cointegración enumerando algunos aspectos de la biografía de los profesores Granger y Engle, que son los dos científicos a partir de los cuales surge esta nueva metodología econométrica. En segundo lugar, se describirá cómo se aplica el análisis de cointegración en el análisis de mercados, en general, y en los pesqueros, en particular. En tercer lugar, se efectuará una revisión y análisis de las aplicaciones de la teoría de la cointegración en mercados pesqueros. Finalmente, resumiremos las principales conclusiones de este trabajo.

## **Origen y desarrollo de la teoría de la cointegración**

### **1. Precedentes del análisis de series temporales en Economía**

Con Yule en la década de los años 1920, se da un paso importante en el análisis de series temporales. Yule (1927) introduce por primera vez los procesos autorregresivos. Un proceso autorregresivo de orden  $p$ ,  $AR(p)$ , viene definido de la siguiente forma:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + u_t \quad (1)$$

donde la variable  $X$  en el instante actual viene explicada por dicha variable retardada distintos periodos y  $u_t$ , que es un proceso de ruido blanco referido al instante actual.

Igualmente, gracias a Yule (1921, 1926), aparecen los procesos de medias móviles. Un proceso de media móvil de orden  $q$ ,  $MA(q)$ , se puede expresar de la siguiente manera:

$$X_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad (2)$$

donde la variable  $X$  en el instante actual se determina promediando un conjunto de variables de ruido blanco ( $u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-q}$ ).

Posteriormente, Wold (1938) demuestra que todo proceso estocástico débilmente estacionario  $X_t$  puede representarse unívocamente como la suma de dos procesos mutuamente incorrelacionados  $X_t = D_t + Y_t$ , donde  $D_t$  es determinista y  $Y_t$  es un proceso de media móvil de orden infinito. Esta idea se denomina Teorema de Descomposición de Wold. A partir de dicho teorema se puede demostrar que todo proceso estocástico débilmente estacionario de media nula,  $X_t$ , que no incorpore componentes deterministas, puede expresarse como una función lineal de variables aleatorias incorreladas,  $u_t$ , es decir,

$$X_t = u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \dots \quad (3)$$

Por tanto, el proceso de medias móviles es un caso particular de proceso débilmente estacionario. Igualmente, gracias a la descomposición de Wold, se demuestra que los procesos autorregresivos constituyen también una aproximación de cualquier proceso estacionario dado que un proceso  $AR(p)$  se puede representar mediante un proceso  $MA(\infty)$ .

Finalmente, mediante una combinación de los procesos autorregresivos y de medias móviles anteriormente presentados, se obtiene un proceso  $ARMA(p,q)$ , donde  $p$  representa el orden de la parte autorregresiva y  $q$  indica el correspondiente a la parte de las medias móviles. Este tipo de procesos se popularizaron principalmente tras la publicación del libro de Box y Jenkins (1976). Un proceso  $ARMA(p,q)$  viene dado por la siguiente expresión:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad (4)$$

Todos los modelos comentados anteriormente se caracterizan porque suponen la estacionariedad de las series analizadas. Sin embargo, en economía, hay muchas

series temporales que no son estacionarias, es decir, son series que se caracterizan por: momentos incondicionales, tales como la esperanza matemática o la varianza, que dependen del tiempo; los efectos de una perturbación aleatoria sobre la serie son permanentes, no transitorios (esto es, presentan “memoria ilimitada”); y la función de autocorrelación simple toma valores que, estando próximos a 1 para cualquier retardo, disminuyen muy lentamente en su valor absoluto. Para poder considerar series no estacionarias, surge el proceso ARIMA (“Auto-regressive integrated moving average”), que sería un proceso autorregresivo y de media móvil integrado. Por tanto, si se trata de una serie no estacionaria, se debería emplear un proceso ARIMA( $p, d, q$ ), donde  $d$  representa el número de diferencias necesarias para convertir la serie temporal en estacionaria. Este proceso viene dado por la siguiente expresión:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)(1 - L)^d X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) u_t \quad (5)$$

siendo  $L$  el operador de retardos. Box y Jenkins (1976) contribuyeron en gran medida a la divulgación de este tipo de modelos.

## 2. Cointegración: origen y definición

Los modelos de series temporales comentados anteriormente son univariantes. A diferencia de estos modelos, la cointegración es una técnica econométrica utilizada en el análisis de series temporales que se emplea para estudiar la relación entre un conjunto de variables no estacionarias. Muchos estudios económicos empíricos tratan de verificar y estimar relaciones entre este tipo de variables. La contrariedad estriba en que la presencia de variables no estacionarias en modelos acarrea un conjunto de problemas en sus estimaciones, así como en los contrastes que se pueden llevar a cabo. Este problema fue tratado por primera vez por Yule (1926). Yule (1926) se dio cuenta de que cuando se trata de establecer un modelo entre variables no estacionarias que no guardan ningún tipo de relación entre sí, se origina una relación espuria. Consecuentemente, advierte del hecho de que se pueden encontrar fácilmente correlaciones estadísticamente significativas entre series temporales no estacionarias independientes.

Suponiendo una regresión entre dos variables integradas de orden 1,  $I(1)$ , una primera solución consistiría en estimar la regresión utilizando las primeras diferencias de ambas variables. No obstante, a pesar de que pudiera parecer una buena solución estimar el modelo utilizando las primeras diferencias de las dos variables, resulta que en realidad se está produciendo una pérdida de información sobre la relación a largo plazo entre ambas variables. Otra solución alternativa más deseable sería considerar la teoría de la cointegración propuesta por Granger y Engle.

El uso del análisis de cointegración se popularizó rápidamente. Siguiendo la definición original proporcionada por Engle y Granger (1987: 253), la cointegración se define de la siguiente forma: “Los componentes de un vector  $Y_t(N \times 1)$  se dice que están cointegrados de órdenes  $d$  y  $b$ , y se denota por  $Y_t \sim CI(d, b)$ , si: todos los componentes de  $Y_t$  son integrados del mismo orden  $d$ ,  $I(d)$ ; existe un vector  $\alpha$ , no nulo, tal que  $\alpha'Y_t = z_t \sim I(d-b)$ , con  $b > 0$ . Al vector  $\alpha$  se le denomina vector de cointegración.”

Desde un punto de vista económico, tal y como expone Suriñach Caralt et al. (1995), una relación de cointegración se puede ver como una relación lineal de equilibrio a la que converge un sistema económico con el paso del tiempo. Aunque las variables implicadas en la relación presenten tendencias estocásticas, es decir, no sean estacionarias, existe una relación de equilibrio a largo plazo entre ellas de tal forma que las situaciones de desequilibrio son sólo transitorias.

Para modelizar la dinámica de las variables en el corto plazo, Granger (1981) establece por primera vez una relación entre el concepto de cointegración y los modelos de corrección de error. Posteriormente, Engle y Granger (1987) formalizan dicha relación, surgiendo de esta manera el denominado Teorema de Representación de Granger.

Granger (1981) demuestra que si  $Y_t$  y  $X_t$  son  $CI(1, 1)$ , existe un modelo de corrección de error para estas dos variables:

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= \sum_j \pi_j \Delta X_{t-j} + \sum_j \alpha_j \Delta Y_{t-j} + \gamma_1 z_{t-1} + u_{1t} \\ \Delta X_t &= \sum_j \pi_j \Delta X_{t-j} + \sum_j \alpha_j \Delta Y_{t-j} + \gamma_2 z_{t-1} + u_{2t} \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $u_{1t}$  y  $u_{2t}$  son errores estacionarios (posiblemente procesos de media móvil) y  $z_{t-1}$  es el error de equilibrio retardado  $Y_{t-1} - (\alpha + \beta X_{t-1})$ . Por tanto,  $z_{t-1}$  es la serie de residuos retardados de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) de la relación de cointegración. A  $z_{t-1}$  se le suele denominar término de corrección de error y recoge la desviación respecto al equilibrio en el periodo  $t-1$ . Si  $Y_t$  y  $X_t$  son  $CI(1, 1)$ , todas las variables del MCE son estacionarias.

También se demuestra el caso recíproco, es decir, si existe un modelo de corrección de error para  $Y_t$  y  $X_t$ , estas dos variables son  $CI(1, 1)$ . Por tanto, la relación entre el concepto de cointegración y el MCE es biunívoca.

### 3. Estimación y contrastes en el análisis de cointegración

Con respecto a las metodologías utilizadas en el análisis de cointegración, en la mayor parte de las aplicaciones empíricas realizadas se suelen emplear el método bietápico de Engle-Granger (Engle y Granger, 1987) o el procedimiento de máxima

verosimilitud de Johansen (Johansen, 1988). El enfoque bietápico de Engle-Granger, a pesar de su simplicidad, presenta varios inconvenientes, especialmente si se trabaja en un contexto multivariante. Siguiendo a Suriñach Caralt et al. (1995), dos de los problemas que se deben destacar son la determinación de la exogeneidad o endogeneidad de las variables de la relación de cointegración y la imposibilidad de contrastar hipótesis sobre los parámetros estimados en la relación de cointegración.<sup>1</sup>

En cambio, el procedimiento de Johansen presenta algunas ventajas con respecto al método bietápico de Engle-Granger debido, entre otras razones, a que permite realizar contrastes de hipótesis sobre la/s relación/es de cointegración del modelo. El procedimiento de Johansen se basa en un modelo de corrección de error. Suponiendo que  $X_t$  sea un vector que contenga  $k$  variables entre las cuales se desea analizar si existen o no una o varias relaciones de cointegración, el modelo se podría escribir del siguiente modo:

$$\Delta X_t = \mu + \Phi D_t + \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_i \Delta X_{t-i} + \Pi X_{t-n} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (7)$$

donde  $\Gamma_i = -I + \Pi_1 + \dots + \Pi_i$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $\Pi = -I + \Pi_1 + \dots + \Pi_n$ ,  $I$  es una matriz unidad de orden  $k$ ,  $D_t$  es un vector de variables ficticias (estacionales, etc.) y, por último,  $\mu$  es un vector de constantes. Así,  $\Pi$  es la solución de equilibrio a largo plazo de la ecuación (7), es decir, la matriz  $\Pi$  o matriz de impactos recoge las posibles relaciones de cointegración. El número de relaciones de cointegración viene dado por el rango de la matriz  $\Pi$  para cuya determinación existen dos contrastes equivalentes desde un punto de vista asintótico: el contraste del valor propio máximo y el contraste de la traza.

Asimismo, se debe destacar que el procedimiento de Johansen permite contrastar hipótesis sobre los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ , usando tests basados en la razón de verosimilitudes (Juselius, 2006). En concreto, en el caso bivariante habría dos variables en el vector  $X_t$ . En el caso de que las dos variables estén cointegradas, el rango de  $\Pi = \alpha\beta'$  es igual a 1 y  $\alpha$  y  $\beta$  son vectores de dimensión  $2 \times 1$ , recogiendo  $\beta$  las  $r$  relaciones de cointegración y representando los parámetros de  $\alpha$  la velocidad del ajuste de las variables dependientes hacia el equilibrio a largo plazo recogido en el término  $\beta' X_{t-n}$ .

<sup>1</sup> Para obtener más detalles sobre el método bietápico de Engle-Granger, véase Suriñach Caralt et al. (1995: 66-77).

Por otro lado, se podría estudiar la causalidad en el sentido de Granger en un modelo VECM con dos variables. Siguiendo a Granger et al. (2000)<sup>2</sup> y desarrollando la ecuación (7), se obtiene el siguiente modelo VECM:

$$\begin{aligned}\Delta X_{1,t} &= \mu_1 + \sum_{i=1}^{11} \phi_{1i} D_{1i} + \delta_1 (X_{1,t-1} - \gamma X_{2,t-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{1i} \Delta X_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{2i} \Delta X_{2,t-i} + u_{1t} \\ \Delta X_{2,t} &= \mu_2 + \sum_{i=1}^{11} \phi_{2i} D_{2i} + \delta_2 (X_{1,t-1} - \gamma X_{2,t-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{1i} \Delta X_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{2i} \Delta X_{2,t-i} + u_{2t}\end{aligned}\quad (8)$$

siendo  $X_{1,t}$  y  $X_{2,t}$  dos variables entre las que se desea determinar la relación de causalidad. La hipótesis nula de que  $X_{1,t}$  no es causada en el sentido de Granger por  $X_{2,t}$  se puede expresar utilizando las siguientes restricciones sobre los parámetros del modelo (8):  $\alpha_{2,1} = \alpha_{2,2} = \dots = \alpha_{2,n-1} = 0$  y  $\delta_1 = 0$ . Las dos restricciones del contraste se denominan en la literatura contrastes de causalidad a corto plazo y contrastes de causalidad a largo plazo, respectivamente. Por lo tanto, el contraste sobre la significación de los parámetros de la matriz  $\Gamma_i$  da una indicación de los efectos causales a corto plazo entre las variables, mientras que los contrastes de significación sobre los parámetros del vector  $\alpha$  indican efectos causales a largo plazo.

Finalmente, para completar el estudio de la relación a corto plazo entre las variables se podrían emplear las funciones de impulso-respuesta y la descomposición de las varianzas de los errores de predicción. Con estas dos técnicas econométricas junto con los contrastes de Wald de significación conjunta de los retardos de cada variable explicativa en el modelo vectorial de corrección de error (VECM) comentados anteriormente, se pretende obtener una idea de cómo se ajustan las variables en el corto plazo hasta alcanzar la relación de equilibrio y el sentido de la relación de causalidad a corto plazo entre ellas.

#### 4. Datos biográficos de Engle y Granger

El profesor Granger (1934-2009), economista británico y profesor emérito en University of California en San Diego (Estados Unidos), fue Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Nottingham (Reino Unido) en 1955 y Doctor en Estadística por la Universidad de Nottingham (Reino Unido) en 1959. A lo largo de su próspera carrera investigadora, realizó numerosas publicaciones en análisis y predicción de series temporales, investigación de precios, mercados especulativos y teoría de finanzas, y teoría estadística y estadística aplicada. Granger introdujo y contribuyó a desarrollar diversas áreas de conocimiento de la econometría como la

<sup>2</sup> Con respecto al análisis de causalidad, se ha de destacar que si dos variables I(1) están cointegradas, existe al menos causalidad en el sentido de Granger en al menos una dirección (Granger, 1988).

cointegración, la contrastación de causalidad, y la realización de predicciones. Al final de su carrera, estuvo muy interesado por los modelos no lineales y las cuestiones metodológicas. Ha publicado 12 libros y más de 200 artículos en revistas de reconocido prestigio científico como *Journal of the American Statistical Association*, *Econometrica*, *Journal of the Royal Statistical Society*, *Applied Economics*, *Journal of Econometrics*, *International Economic Review*, *Journal of Economic Literature*, *The Statistician*, *Journal of Time Series Analysis*, entre otras.

Granger fue miembro de la *American Economic Association* y la *Western Economic Association*, que presidió en el período 2002-2003. Obtuvo el Premio Nóbel de Economía en el año 2003. Fue admitido en la Orden de los Caballeros por su Majestad la Reina Isabel II de Inglaterra en el año 2004. Finalmente, fue doctor honoris causa por las siguientes universidades: *University of Nottingham* (1992), *Universidad Carlos III de Madrid* (1996), *Stockholm School of Economics* (1998), *University of Loughborough* (2002), *Aarhus University* (2003).

Por su parte, Engle (1942-), economista estadounidense, es actualmente catedrático “Michael Armellino” de gestión de servicios financieros en *New York University* (Estados Unidos). Fue Licenciado en Ciencias Físicas por el *Williams College* (Estados Unidos) en 1964, Máster en Ciencias Físicas por *Cornell University* (Estados Unidos) en 1966 y Doctor en Economía por *Cornell University* (Estados Unidos) en 1969. Ha sido profesor en el *Massachusetts Institute of Technology* (1969-1975) y en *University of California* en San Diego (Estados Unidos), donde fue Profesor Titular en el periodo 1975-1977 y posteriormente Catedrático en 1977. Allí, trabajó con el profesor Granger. Es un especialista en el análisis de series temporales, teniendo un especial interés por el análisis de mercados financieros. Uno de sus principales aportaciones ha sido el desarrollo de los modelos de volatilidad variante en el tiempo (ARCH). Su investigación ha dado origen también a métodos estadísticos innovadores como la cointegración, el modelo de Duración Condicional Autorregresiva (ACD), el modelo Valor Autorregresivo Condicional en Riesgo (CAViaR) y los modelos de Correlación Condicional Dinámica (DCC). Para hacerse una idea de la magnitud de sus investigaciones, se debe comentar que ha publicado 4 libros y más 100 artículos en revista de reconocido prestigio científico entre las que merece la pena destacar *Econometrica*, *Journal of Business and Economic Statistics*, *Journal of Econometrics* y *Journal of the American Statistical Association*, entre otras.

Engle es miembro de la *American Academy of Arts and Sciences*. Compartió con Granger el Premio Nóbel de Economía en el año 2003. Debe mencionarse, asimismo, que el profesor Engle es doctor honoris causa por la *University of Southern Switzerland* (2003), la *Université de Savoie* (2005) y el *HEC, Paris* (2005).

## Teoría de la Cointegración y análisis de mercados

Como se ha comentado anteriormente, con la cointegración se pueden analizar tanto relaciones horizontales como verticales entre precios de distintos mercados. En particular, esta metodología tiene numerosas aplicaciones entre las que destacan: el estudio de relaciones de sustitución entre productos, el análisis de la integración de mercados separados espacialmente, el estudio de la transmisión de la información sobre los precios por la cadena de comercialización, el estudio de los márgenes de los intermediarios de la cadena, el análisis del poder de mercado, el análisis de la demanda derivada y el estudio de la agregación de productos para estimar funciones de demanda.

La cointegración presenta la ventaja frente a otras técnicas alternativas, tal y como señala Asche et al. (1997) o Asche et al. (2002), de que sólo se necesita disponer de datos de precios para realizar un estudio. En cambio, esta técnica presenta el inconveniente de que proporciona una menor cantidad de resultados que otras técnicas alternativas.

A continuación, se tratará de clarificar cómo se puede emplear la cointegración en el estudio de mercados. Para ello, se empleará la relación más simple que podría surgir cuando se estudian relaciones entre precios de mercados situados en el mismo nivel o en eslabones diferentes de la cadena de comercialización. Esta expresión viene representada mediante la ecuación siguiente:

$$\ln p_{1t} = \alpha + \beta \ln p_{2t} + u_t \quad (9)$$

donde  $p_{1t}$  y  $p_{2t}$  son precios,  $u_t$  es un proceso de ruido blanco,  $\alpha$  representa un término constante que refleja las diferencias entre los niveles de los precios y  $\beta$  proporciona la elasticidad de transmisión de precios (i.e., el incremento o decremento que experimenta el precio del mercado que se considere variable dependiente ante un cambio de un 1% en la variable independiente). Si  $\beta=0$ , no existiría relación entre los precios. Si  $\beta=1$ , en el caso de un análisis de relaciones verticales entre precios, los márgenes del mercado situados en una posición más avanzada de la cadena de comercialización serían constantes, es decir, los precios de ese mercado serían los del mercado situado en el otro nivel de la cadena más una comisión constante. Además, la transmisión de la información en relación a los precios a través de la cadena de comercialización se produciría completamente y sin ningún tipo de distorsiones. Igualmente, teniendo en cuenta la teoría de la demanda derivada<sup>3</sup>, se podrían usar los precios de los mercados situados en los eslabones más bajos de la cadena de comercialización para obtener información sobre el comportamiento de los precios en otros mercados situados en posiciones más avanzadas de la misma. En el caso de un análisis de relaciones horizontales

<sup>3</sup> Véase Asche et al. (2002).

entre precios, se verificaría la versión relativa de la Ley del Precio Único (LOP) y se podría afirmar que los mercados están perfectamente integrados. En otras palabras, los precios relativos entre los mercados serían constantes lo que implicaría, teniendo en cuenta la relación existente entre la teoría de cointegración y las relaciones de sustitución entre productos, que los bienes en cuestión serían perfectamente sustitutivos. Finalmente, si  $\beta$  fuera distinto de cero y distinto de uno, existiría una relación entre los precios. No obstante, en el caso de relaciones verticales de precios, los márgenes del mercado situado en una posición más avanzada de la cadena de comercialización no permanecerían constantes a lo largo del tiempo. En cuanto a las relaciones horizontales, la no aceptación de la LOP implicaría que los mercados estarían cohesionados sólo parcialmente, o sea, que los productos podrían considerarse tan sólo sustitutivos imperfectos.

Para implementar esta técnica, es conveniente señalar que antes de realizar el análisis de cointegración se debe analizar el orden de integración de las series. Para ello, será necesario utilizar los contrastes de raíces unitarias y los contrastes de estacionariedad.<sup>4</sup> Una vez que se determine el orden de integración de las series y se realicen los contrastes de cointegración, con el fin de comprobar si  $\beta=0$ , se llevarán a cabo los contrastes de exclusión. De esta forma, se analizará la significación estadística de los parámetros de la relación de cointegración. Por otro lado, para verificar si  $\beta=1$ , se realizarán tests de proporcionalidad o tests de la LOP, cambiando la denominación del test dependiendo de que se estén analizando relaciones verticales u horizontales entre precios, respectivamente. Además, se realizarán los tests de significación de los parámetros de velocidad del ajuste con el fin de determinar la dirección en la que se transmite la información sobre los precios entre los mercados. Este tipo de contrastes permiten analizar las relaciones de causalidad a largo plazo entre los precios y proporcionan información sobre el liderazgo de los mercados en el mecanismo de formación de los precios. Por otro lado, para estudiar las relaciones de causalidad a corto plazo entre los precios se pueden emplear tres herramientas complementarias entre sí: los contrastes de Wald de significación conjunta de los retardos de cada variable explicativa en el modelo vectorial de corrección de error (VECM), la descomposición de las varianzas de los errores de predicción y las funciones de impulso-respuesta.

En la actualidad, gracias a los avances que se están produciendo en el análisis de series temporales, se están realizando estudios que tienen en cuenta la presencia de cambios estructurales en las series, la asimetría en la transmisión de precios por la cadena de comercialización, la volatilidad en los precios de los distintos eslabones de la cadena de comercialización, etc.

---

<sup>4</sup> Para una revisión detallada de los contrastes de raíces unitarias y los procedimientos existentes para realizar un análisis de cointegración, véase Maddala y Kim (1998).

## Un campo de aplicación de la cointegración: análisis de los mercados pesqueros

El número de publicaciones sobre aplicaciones de la teoría de la cointegración a mercados pesqueros ha experimentado un crecimiento progresivo desde principios de la década de los 90. En la Figura 1 se muestra la velocidad de difusión de la teoría de la cointegración en el ámbito de los mercados pesqueros, distinguiendo entre publicaciones sobre relaciones horizontales y verticales entre mercados. Con respecto a las relaciones horizontales, el máximo número de publicaciones se sitúa en el año 1999. En cambio, en relación con las relaciones verticales, el máximo se encuentra en el año 2002. En este sentido, es interesante señalar que el año 1999 y el año 2002 coinciden con los periodos donde finalizan los 4º y 5º Programas Trienales de Investigación de la Unión Europea.

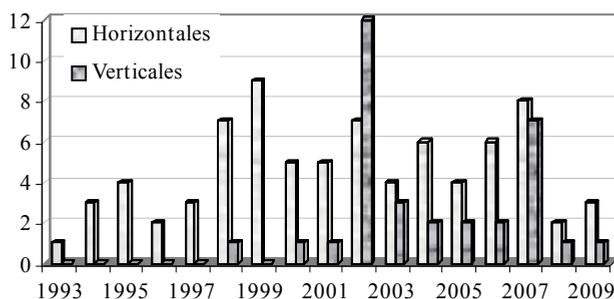


Figura 1. Evolución del número de aplicaciones de la teoría de la cointegración a los mercados pesqueros

Entre las publicaciones que han tenido más repercusión en el análisis de las relaciones horizontales entre mercados pesqueros destacan los trabajos realizados por Asche et al. (1997), Asche et al. (1999) y Nielsen et al. (2009). Como aplicación al estudio de las relaciones verticales entre mercados, se puede destacar el trabajo de Asche et al. (2002).

En cuanto a las relaciones horizontales, Asche et al. (1997) emplean tanto la teoría de la cointegración como los modelos de demanda estructurales, utilizando un Modelo de Demanda Casi Ideal (AIDS). Se llega a la conclusión de que ambos enfoques no sólo son compatibles sino que además resultan ser complementarios. Asimismo, realizan un análisis de las interrelaciones existentes entre tres especies en los mercados europeos: salmón fresco, salmón congelado y crustáceos, determinando que existe una relación entre los precios de las especies consideradas y cuantificando el grado de sustitución entre cada pareja de productos mediante las estimaciones de los coeficientes de la relación de cointegración encontrada.

En un artículo posterior, Asche et al. (1999) establecen la relación entre la Ley del Precio Único (LOP) y la agregación de productos en el estudio de la demanda usando una versión generalizada del teorema de los bienes compuestos (Lewbel, 1996), desarrollando una aplicación empírica para estudiar si existe un único mercado de salmón a nivel mundial. Tras verificar que existe cointegración y que se cumple la LOP entre los precios de éstas, se concluye que existe un único mercado de salmón a nivel mundial.

Como última aplicación de la cointegración al estudio de las relaciones horizontales, Nielsen et al. (2009) analizan la integración de varios mercados de especies pesqueras de varios países a nivel europeo. Utilizando el contraste de cointegración de la traza, se determina que existe evidencia de integración tanto en los mercados de productos pesqueros frescos como en los de congelados. La LOP se cumple en el mercado fresco en relación a los segmentos de peces planos y peces pelágicos. Además, se identifica una integración de mercados más débil entre 13 especies pesqueras frescas y 7 congeladas, y se muestra cómo los precios relativos permanecen bastante estables con el transcurso del tiempo.

Con respecto a las aplicaciones de la cointegración al estudio de las relaciones verticales entre mercados, Asche et al. (2002) desarrollan la teoría que explica el uso de la cointegración en el análisis de la demanda derivada. Los autores, utilizando el procedimiento de máxima verosimilitud de Johansen, establecen que existe cointegración entre los precios de los mercados considerados. Asimismo, realizan contrastes de proporcionalidad, concluyendo que los precios del bacalao en primera venta en Noruega son suficientes para obtener información sobre las elasticidades de demanda en el mercado final para el caso del bacalao fresco y el bacalao salado seco. Sin embargo, esto no se puede afirmar en relación con los filetes congelados de la misma especie.

## Conclusiones

Con este trabajo, se ha analizado el origen y la evolución del análisis de cointegración y se ha tratado de poner de manifiesto la gran importancia que tiene en la actualidad la teoría de la cointegración en el análisis de mercados, en general, y en los mercados pesqueros, en particular. Tras describir cómo surgió y se desarrolló esta técnica, se han comentado algunos datos biográficos importantes de los profesores que introdujeron esta técnica tan ampliamente usada en el análisis de series temporales. Además, se ha puesto de manifiesto como el análisis de cointegración se puede aplicar en el análisis de mercados, comentando algunos de los artículos más relevantes relacionados con mercados pesqueros.

## Bibliografía

- ASCHE, F., SALVANES, K. G. y STEEN, F. (1997): "Market Delineation and Demand Structure". *American Journal of Agricultural Economics*, 79, 139-150.
- ASCHE, F., BREMNES, H. y WESSELLS, C. R. (1999): "Product aggregation, market integration and relationships between prices: an application to world salmon markets". *American Journal of Agricultural Economics*, 81, 568-581.
- ASCHE, F., FLAATEN, O., ISAKSEN, J. R. y VASSDAL, T. (2002): "Derived Demand and Relationships Between Prices at Different Levels in the Value Chain: A Note". *Journal of Agricultural Economics*, 53, 101-107.
- BOX, G. E. P. y JENKINS, G. M. (1976): *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. New Jersey, Holden-Day.
- ENGLE, R. F. y GRANGER, C. W. J. (1987): "Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing". *Econometrica*, 55, 251-276.
- ENGLE, R. F. y YOO, B. S. (1987): "Forecasting and testing in co-integrated systems". *Journal of Econometrics*, 35, 143-159.
- GRANGER, C. W. J. (1981): "Some properties of time series data and their use in econometric model specification". *Journal of Econometrics*, 16, 121-130.
- (1988): "Some recent developments in a concept of causality". *Journal of Econometrics*, 39, 199-211.
- GRANGER, C. W. J. y NEWBOLD, P. (1974): "Spurious regressions in econometrics". *Journal of Econometrics*, 2, 111-120.
- GRANGER, C. W. J., HUANG, B.-N. y YANG, C.-W. (2000): "A bivariate causality between stock prices and exchange rates: evidence from recent Asian flu". *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 40, 337-354.
- JOHANSEN, S. (1988): "Statistical analysis of cointegration vectors". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-254.
- JUSELIUS, K. (2006): *The Cointegrated VAR Model, Methodology and Applications*, Oxford, Oxford University Press.
- LEWBEL, A. (1996): "Aggregation without Separability: A Generalized Composite Commodity Theorem". *American Economic Review*, 86, 524-561.
- MADDALA, G. S. y KIM, I.-M. (1998): *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*. Cambridge, Cambridge University Press.
- NIELSEN, M., SMIT, J. y GUILLEN, J. (2009): "Market integration of fish in Europe". *Journal of Agricultural Economics*, 60(2): 367-385.
- PHILLIPS, P. C. B. (1991): "Optimal inference in cointegrated systems". *Econometrica*, 59, 283-306.
- PHILLIPS, P. C. B. y OULIARIS, S. (1990): "Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration". *Econometrica*, 58, 165-193.

SURIÑACH CARALT, J., ARTÍS ORTUÑO, M., LÓPEZ BAZO, E. y SANSÓ ROSELLÓ, A. (1995): *Análisis económico regional. Nociones básicas de la Teoría de la Cointegración*. Barcelona, Antoni Bosch Editor y Fundació Bosch i Gimpera.

YULE, G. U. (1921): "On the Time-Correlation Problem with Special Reference to the variate Difference Correlation Method". *Journal of the Royal Statistical Society*, 84, 497-526.

- (1926): "Why Do We Sometimes Get Nonsense Correlations Between Time Series? A study in Sampling and the Nature of Time Series". *Journal of the Royal Statistical Society*, 89, 1-64.
- (1927): "On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with special reference to Wolfer's Sunspot Numbers". *Philosophical Transactions*, A 226, 267-298.

WOLD, H.O. (1938): *A study in the Analysis of Stationary Time Series*. Uppsala, Almqvist and Wicksell.

## CAPÍTULO 17

# Les Doutes sur les bases du calcul des probabilités de Louis-Frédéric Ancillon

THIERRY MARTIN  
Université de Franche-Comté

### Introduction

« The memoir contains no mathematical investigations; its object is to throw doubts on the possibility of constructing a Theory of Probability and it is of very little value. The author seems to have determined that no Theory of Probability *could* be constructed without giving any attention to the Theory which *had* been constructed. He names Moses Mendelsohn and Garve as having already examined the question of the admissibility of such a Theory. »

Tel est le jugement que porte Isaac Todhunter, dans son *History of the Mathematical Theory of Probability* (§ 840, p. 453), sur le mémoire de Louis-Frédéric Ancillon, *Doutes sur les bases du calcul des probabilités*, lu à l'Académie de Berlin le 16 octobre 1794 et publié cette même année 1794 dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres* de Berlin.

On pourrait croire alors que le texte d'Ancillon, ne contenant aucune recherche mathématique, ne concerne en rien la théorie mathématique des probabilités. C'est en partie vrai, en ce sens qu'il n'apporte aucune contribution à la construction du calcul des probabilités, Ancillon n'étant pas lui-même mathématicien. En revanche, non seulement le titre même du mémoire fait clairement référence à la théorie

mathématique, puisque les doutes que soulève Ancillon portent bien sur « les bases du calcul des probabilités », mais Ancillon fait explicitement référence aux développements de la théorie mathématique des probabilités. Ainsi, lorsqu'il formule la conclusion de son mémoire, il précise que :

« L'idée d'une logique des probables ou d'une théorie proprement ainsi dite & démontrable de la probabilité s'est présentée aux plus beaux génies, & est entrée dans la sphère de leurs travaux les plus intéressants. Les uns, comme Moses Mendelsohn, Garve & d'autres, ont examiné jusqu'où elle était admissible ; d'autres, comme Leibnitz, en ont esquissé le tableau ; d'autres ont paru le réaliser mathématiquement, on connaît sur ce point les travaux des célèbres Jacques et Nicolas Bernoulli ; d'autres y ont ramené comme à un tissu de règles démontrées ou démontrables, les uns le droit, les autres la médecine, d'autres les questions qui peuvent naître sur l'arithmétique politique, l'établissement des tontines, des loteries, des caisses pour les veuves, les hasards de l'inoculation de la petite vérole, les décisions rendues à la pluralité des voix, les assurances maritimes & toutes les spéculations où la démonstration nous abandonne ».

Et il ajoute :

« Struyk en Hollande, Deparcieux en France, Young en Angleterre, Euler et Lambert en Allemagne, Toaldo à Padoue, d'Alembert, Daniel Bernoulli, & notre illustre confrère du même nom<sup>1</sup> dans cette Académie, ne seraient qu'une partie des auteurs que je pourrais nommer, si je voulais épuiser les renseignements savants que ce dernier a eu la complaisance de me fournir sur l'historique de cette matière ».

S'il est vrai qu'Ancillon ne fait pas porter son analyse sur le contenu même du calcul des probabilités tel qu'il est édifié à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, c'est que son objet se situe en amont ; il concerne la possibilité même d'une théorie mathématique des probabilités. Ce qu'Ancillon met en doute, c'est le projet même d'une science du probable. Cependant, il ne s'agit pas pour lui de rejeter le raisonnement probabiliste en le dénonçant comme sophistique, ainsi que le fera plus tard Auguste Comte dans la 27<sup>e</sup> leçon du *Cours de philosophie positive* (1975, 435 note)<sup>2</sup>. Le but que vise Louis-Frédéric Ancillon est de souligner les difficultés auxquelles se heurte le projet de science du probable, difficultés à ses yeux insurmontables. Nous nous proposons ici de restituer et d'évaluer l'argumentation déployée par Ancillon. Mais auparavant, il convient de présenter brièvement notre auteur, dont l'œuvre peut être mal connue du lecteur.

<sup>1</sup> L'« illustre confrère » dont parle ici Ancillon est sans doute Jean III Bernoulli (1744-1807), neveu de Daniel et membre de l'Académie de Berlin depuis 1763.

<sup>2</sup> Sur la critique comtienne du calcul des probabilités, on peut se reporter à Coumet (2003).

## Vie et œuvre de Louis-Frédéric Ancillon

On possède peu d'informations biographiques sur Louis-Frédéric Ancillon<sup>3</sup>. Il est issu d'une importante famille de pasteurs et de juristes français protestants, originaires de la ville de Metz, en Lorraine, qui ont trouvé refuge à Berlin après la Révocation par Louis XIV de l'Édit de Nantes en 1685, lequel supprimait la liberté de culte dont bénéficiaient les protestants depuis 1598. Il est le petit-fils de Charles Ancillon (1659-1715), avocat et historien qui exerça des fonctions administratives importantes à Berlin (inspecteur des tribunaux de justice, conseiller d'ambassade, historiographe du roi) et qui publia plusieurs ouvrages de critique littéraire, d'histoire et de politique.

Louis-Frédéric Ancillon est né à Berlin le 21 avril (ou 21 mai) 1740 et mort le 13 juin 1814 à Berlin. Fils de Frédéric Auguste Ancillon (Bâle 1698-1758), pasteur et homme de Lettres et de Judith Naudé, il fut lui-même pasteur de l'Église française réformée de Berlin de 1765 à 1812. Le 9 novembre 1786, il est nommé membre de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin dans la classe de philosophie spéculative, dont les attributions couvrent la logique, métaphysique et morale. L'Académie, dont le premier président est Leibniz, avait été fondée en 1700 et fut réorganisée en 1746. Elle fut alors composée de quatre classes: 1° philosophie expérimentale, 2° mathématiques, 3° philosophie spéculative, 4° belles-lettres (philologie). Dirigée par Maupertuis à partir de 1746 jusqu'à sa mort en 1759, elle compte parmi ses membres des mathématiciens et des philosophes célèbres: Euler, Lambert, d'Alembert, Lagrange, Montesquieu, Diderot, Voltaire, Kant, Lessing, ...

Louis-Frédéric Ancillon est le père de Jean-Pierre Frédéric Ancillon (1766-1837), professeur d'histoire à l'Académie militaire de Berlin, puis pasteur de l'église française réformée de Berlin comme son père. Jean-Pierre Frédéric fut ministre des affaires étrangères et a publié plusieurs ouvrages de critique littéraire et de philosophie, notamment les *Mélanges de littérature et de philosophie*, Paris, 1809. On confond très souvent ces deux auteurs, qu'on appelle, aussi bien l'un que l'autre, Frédéric Ancillon, et qui furent tous deux membres de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. C'est par exemple le cas de Keynes, qui,

<sup>3</sup> Ainsi la *Biographie universelle* de Michaud (1843, t. I, pp. 637b-638a) s'en tient à noter : « Louis-Frédéric Ancillon, mort en 1814, âgé de 70 ans, a laissé quelques bons écrits de philosophie religieuse et de littérature sacrée, entre autres 1° *Judicium de judiciis circa argumentum Cartesianum pro existentia Dei ad nostra usque tempora latis*, Berlin, 1792, in-8° ; 2° *Tentamen in psalmo sexagesimo octavo denuo vertendo, cum Dissertatione historica, quam claudit Carmen seculare Horatiicum eodem psalmo collatum*, Berlin, 1797, in-8° ; un article qui a remporté le prix de l'Académie de Rouen sur les *beautés oratoires et poétiques de l'Écriture sainte* ; 4° un *Éloge de Saurnaise*, couronné par l'académie de Dijon, et divers Mémoires insérés dans le recueil de l'académie de Berlin ». Voir aussi Haag (1846, pp. 89b-90a).

dans son *Treatise on probability* (p. 82), attribuée à Louis-Frédéric le titre de ministre des affaires étrangères de Prusse<sup>4</sup>.

L'œuvre livresque de Louis-Frédéric Ancillon est surtout composée, outre quelques sermons, de 26 articles publiés dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*<sup>5</sup>, et dans les *Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* qui en prennent la suite. Il s'agit d'articles de métaphysique, de théorie de la connaissance et de philosophie morale et politique.

La philosophie de la connaissance d'Ancillon est marquée par une forte empreinte de la philosophie sceptique anglaise, notamment celle de Hume, dont il s'efforce à la fois de tirer les leçons sur le plan de la connaissance, et de conjurer les effets jugés dévastateurs dans le champ de la philosophie morale et de la théologie<sup>6</sup>. L'Académie de Berlin fut d'ailleurs l'une des principales sources de diffusion de la philosophie de Hume en France et en Allemagne au XVIII<sup>e</sup> siècle grâce justement à l'action d'Ancillon et de Jean-Bernard Mérian (directeur de la classe de philosophie spéculative). Cet intérêt critique pour la pensée sceptique se lit notamment dans le « Mémoire sur la certitude, et en particulier sur la nature de la certitude humaine » (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1792-1793 et plus encore dans le « Dialogue entre Berkeley et Hume »<sup>7</sup> (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1796). Il est à noter que l'Académie de Berlin est aussi, à partir de 1786, l'une des premières sources de la diffusion de la pensée kantienne auprès des philosophes francophones, diffusion à laquelle participe Louis-Frédéric Ancillon<sup>8</sup>, notamment par son « Mémoire sur les fondements de la métaphysique » (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1799-1800)<sup>9</sup>.

<sup>4</sup> « The communication to the Berlin Academy in 1794, entitled *Doutes sur les bases du calcul des probabilités* etc., is not as well known as it deserves to be. He writes as a follower of Hume, but adds much that is original and interesting. An historian, who also wrote on a variety of philosophical subjects, Ancillon was, at one time, the Prussian Minister of Foreign Affairs », 1921, p. 82.

<sup>5</sup> Nous abrégons dans la suite le titre sous la forme *Mémoires de l'Académie de Berlin*.

<sup>6</sup> Pour une présentation de la relation de Louis-Frédéric Ancillon à la philosophie sceptique, on peut consulter Charles (2003).

<sup>7</sup> On peut voir à ce sujet l'article de Charles, Laursen, Popkin et Zakatistovs (2001).

<sup>8</sup> Voir sur ce point François Azouvi et Dominique Bourel (1991, 41-54). La lecture que fait Ancillon de la philosophie kantienne est très critique ; il l'interprète comme la ruine de la métaphysique (cf. aussi le mémoire « Essai ontologique sur l'âme », *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1796, pp. 128-193).

<sup>9</sup> Outre ceux déjà cités, les principaux textes d'Ancillon publiés dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* sont :

- « Considérations sur l'état de nature », 1786/87, pp. 491-516 ;

- « Réflexions sur les rapports de la synthèse psychologique et de la synthèse morale », 1788/89, pp. 402-416 ;

- « Essai d'une théorie de la sensibilité », 1790/91, pp. 405-418 ;

## L'interprétation ancillonienne des probabilités

L'argumentation déployée par Louis-Frédéric Ancillon dans ses *Doutes sur les bases du calcul des probabilités* commence par mettre en place une distinction entre probabilité objective et probabilité subjective.

Ancillon pose tout d'abord en principe que nous n'avons pas directement accès au monde extérieur. Nous n'avons à faire qu'à des représentations et des combinaisons de représentations. La probabilité ne s'applique donc pas à des événements, mais à des propositions. Il en résulte une définition épistémique de la probabilité: « Dire qu'un fait passé, présent ou à venir est probable, c'est dire qu'une proposition est probable. Nous en affirmons ou nous en nions l'existence par des considérations qui nous le rendent probable ou improbable », écrit-il (p. 4)<sup>10</sup>.

Qu'est-ce alors qu'une proposition probable ? Elle se définit par opposition à une proposition certaine, les propositions étant pensées ici de manière traditionnelle par le rapport d'un sujet à ses prédicats. La vérité d'une proposition dépend de deux facteurs: 1° le nombre de prédicats permettant de décrire le contenu du sujet, 2° la sûreté de la méthode mise en œuvre pour identifier ces prédicats. Si l'énumération des prédicats définissant le sujet permet d'en épuiser le contenu, et si la méthode utilisée pour les identifier ne souffre d'aucune obscurité, alors la proposition est nécessaire, et donc vraie. En revanche, si le sujet n'est pas entièrement connu, ou si la méthode de décomposition contient une part d'obscurité, la proposition est seulement probable. Dit autrement, une proposition probable est celle dont « la vérité ou la liaison du prédicat et du sujet est probable », de même qu'une proposition « démontrée ou nécessaire » est celle dont « la vérité ou la liaison du prédicat et du sujet est démontrée ou nécessaire » (p. 13).

Il convient de remarquer que le probable s'opposant ici non au certain, mais au nécessaire, la probabilité reçoit une signification *objective*. C'est ce que précise Ancillon, indiquant que la probabilité est objective en deux sens. D'une part le

---

- « Considérations sur le principe de la pensée ou Examen du passage de Locke sur ce sujet », 1794/95, pp. 33-73 ;

- « Mémoire sur les pressentiments », 1797, pp. 14-52 ;

- « Considérations sur la différence de nos idées », 1799/1800, pp. 29-74 ;

- « Considérations sur l'analyse des principes dans les sciences », 1801, pp. 31-50 ;

- « Examen de la métaphysique des Grecs dans les questions relatives au monde », 1801, pp. 100-128, puis 1812/13, pp. 16-122 ;

- « Pensées philosophiques et morales », 1801, pp. 51-72, puis 1802, pp. 50-74 ;

- « Recherches critiques et philosophiques sur l'entéléchie d'Aristote », 1804/11), pp. 1-78 ;

- « Considérations sur l'idée et le sentiment de l'Infini », 1804, pp. 53-70 ;

- « Essai sur l'esprit du leibnizianisme », 1812/13, pp. 1-15.

<sup>10</sup> C'est justement cette interprétation épistémique de la probabilité qui fait l'originalité du texte d'Ancillon selon Keynes (1921, p. 5 note).

contenu du sujet est indépendant de la connaissance que nous en avons. Cela suppose que les prédicats du sujet lui appartiennent à raison de sa nature, non eu égard à la représentation que nous nous en faisons. D'autre part les lois logiques qui déterminent la validité des inférences sont indépendantes de la façon particulière et plus ou moins habile dont tel ou tel individu les applique. Ainsi, écrit Ancillon (p. 5), la probabilité est objective parce que

« d'un côté le sujet qui est censé renfermer beaucoup plus que ce qu'on en affirme, est hors de nous, il doit avoir sa consistance pour ainsi dire, sa nature, sa capacité déterminée sans nous, et indépendamment de ce que nous en pouvons penser ou dire ; de l'autre, il doit y avoir dans la logique ou dans la réunion de toutes les lois du raisonnement une perfection pour ainsi dire absolue, distincte du sentiment que nous en avons, et par lequel nous nous en apercevons ».

Puisque la probabilité s'applique à des propositions, et non à des faits ou des événements, si ce n'est indirectement en tant que ces propositions renvoient aux événements, l'expression de probabilité objective ne désigne nullement ici la mesure de la possibilité de réalisation d'un événement futur ; il s'agit d'une probabilité objective au sens où la logique probabiliste (celle de Keynes ou de Carnap) pense l'objectivité du raisonnement probable, à savoir comme une propriété résultant de la mise en œuvre des règles logiques du raisonnement rationnel.

La conception d'Ancillon s'accompagne d'une position qu'on peut appeler platoniste du vrai: la vérité logique existe hors de l'esprit humain. Ce platonisme est fondé sur un principe métaphysique: la vérité logique existe pour « l'intelligence suprême ». Ceci permet de faire tenir ensemble d'un côté la nature intrinsèquement épistémique de la probabilité, en ce sens qu'est probable une proposition, donc une combinaison de représentations, et non un événement physique, et de l'autre son objectivité, puisqu'une proposition est vraie ou probable à raison de la nature nécessaire ou non de la liaison du prédicat au sujet, et non du degré de connaissance individuellement variable dont bénéficie le sujet connaissant.

Cela implique qu'il convient de distinguer entre le vrai considéré en lui-même d'une part, et son appréhension par l'esprit humain de l'autre. De même, selon Ancillon, il convient de distinguer une probabilité objective et absolue d'un côté, une probabilité subjective et relative (c'est-à-dire relative au sujet connaissant) de l'autre. Il écrit ainsi (p. 5):

« La première de toutes les sciences, celle de raisonner, a sa perfection absolue qu'on pourrait appeler son infaillibilité ; par conséquent toute probabilité qui ne sera qu'une partie de cette science, sera une probabilité objective absolue, qui a une sorte d'existence hors de nous et dans la nature même des choses [...] il y a outre cela une probabilité subjective ou relative, et j'entends par là une estimation que nous faisons de la valeur d'une

proposition, non d'après la place qu'elle occupe entre tous les degrés d'évidence possibles, ce qui la rendrait objective, mais d'après des principes fondés sur notre manière d'être et de penser ».

Ce passage met en lumière la dualité de la probabilité: elle est *objectivement* une fraction de la connaissance vraie (« une partie de la science » écrit Ancillon) correspondant à un « degré d'évidence », et *subjectivement* « une estimation que nous faisons de la valeur d'une proposition », donc, dirions-nous, un degré de croyance, ou pour parler comme Ancillon, un degré d'assentiment.

Qu'en est-il plus précisément de cette « probabilité subjective » ?

L'appréhension d'une connaissance s'accompagne chez le sujet connaissant, précise Ancillon, du sentiment plus ou moins fort de la vérité de cette connaissance. Ce sentiment immédiat qui accompagne la saisie du vrai est le sentiment de son évidence, sentiment qui nous fait donner notre assentiment à cette proposition.

Entre la proposition nécessairement vraie et celle qui est la plus douteuse, s'étendent donc des « degrés d'assentiment » (nous dirions des degrés de croyance) qui vont de l'adhésion totale à l'acquiescement le plus faible. La série des degrés de croyance constitue donc le champ de la probabilité subjective, tout comme la série des degrés d'évidence partielle forme le champ de la probabilité objective. Ainsi, écrit Ancillon (p. 6):

« Tous les degrés qui depuis l'évidence complète, nous font passer jusqu'à la dernière et à la plus faible de ses nuances, mesurent le vaste champ de la probabilité subjective qui se compose de toutes les manières dont le vrai, suivant que nous croyons plus ou moins l'avoir, peut nous affecter ».

Le but que poursuit ici Ancillon est de montrer qu'il n'y a pas correspondance entre les degrés de croyance et les degrés d'évidence, c'est-à-dire entre probabilité subjective et probabilité objective. Cette discordance permet, en effet, d'affirmer que les degrés de la probabilité subjective ne peuvent recevoir une expression précisément déterminée. Au contraire, indique Ancillon, ils varient 1° selon les individus et 2° selon les circonstances où se trouve placé le même individu aux différents moments de son existence, ceci parce que les « principes d'assentiment » qui les déterminent sont divers, hétérogènes et mêlés. Cette hétérogénéité résulte de facteurs aussi bien logiques que psychologiques, qu'Ancillon énumère.

Elle tient déjà à leur diversité d'extension. Les sources de nos croyances peuvent en effet être universelles, lorsqu'elles sont fondées sur la nature de l'homme ; particulières quand elles sont partagées par les individus appartenant à une catégorie sociale déterminée ; ou encore individuelles si elles sont propres à un individu singulier. Ces principes d'origines diverses se conjuguent chez l'individu selon une multitude de combinaisons variées, et ceci pour soutenir la croyance en une même connaissance.

Elle tient ensuite à la diversité d'origine des principes d'assentiment, ceux-ci provenant soit de l'entendement, soit de la sensibilité, soit, indique encore Ancillon, du sens moral. Et là encore, ces principes se combinent de différentes façons. Enfin, nos croyances répondent également à des « penchants » ou des tendances hérités de l'enfance, donc d'une époque où nous n'avions qu'une représentation confuse des motifs qui guident notre conduite, et nos croyances actuelles subissent encore le poids des sentiments éprouvés dans l'enfance.

Ces arguments concourent à établir une même thèse: l'irrationalité des principes qui fondent nos croyances, puisque les degrés de croyance affectés aux propositions auxquelles nous adhérons 1° résultent d'une combinaison d'éléments hétérogènes, mélangés dans des proportions variables, et 2° ne peuvent correspondre aux degrés d'évidence dont jouissent les propositions prises comme pur produit du raisonnement conformes aux lois de la logique.

Ce premier moment de l'analyse s'achève sur l'indication que la distinction précédente entre probabilité objective et probabilité subjective, nécessaire pour penser le probable, n'a pas d'existence effective; elle remplit une fonction pédagogique. En réalité, précise Ancillon, ces deux types de probabilité n'existent jamais à l'état pur et séparé; toute probabilité est à la fois, et à des degrés divers, objective et subjective, car notre connaissance tient à la fois de l'objet connu et du sujet qui l'appréhende. Pourquoi Ancillon éprouve-t-il le besoin de formuler cet argument? On peut supposer qu'il a pour fonction d'étendre aux degrés d'évidence les effets de l'hétérogénéité caractérisant les degrés de croyance. Autrement dit, il n'est pas plus possible d'envisager une mesure des degrés de probabilité objective qu'il ne l'est d'effectuer une mesure des degrés de probabilité subjective. Sans énoncer explicitement cette conséquence, Ancillon s'en tient à indiquer qu'il convient de considérer, à côté des probabilités objective et subjective, une troisième forme de probabilité, la « probabilité composée ou mixte ». (Il va sans dire que l'expression de « probabilité composée » utilisée ici n'a rien à voir avec ce que le mathématicien appelle probabilité composée).

Au terme de ce premier moment de son analyse, Ancillon peut alors fournir une définition de la probabilité. Puisque la probabilité ne mesure pas la possibilité de réalisation d'un événement, elle ne saurait être définie comme le rapport des cas favorables sur les cas possibles. Elle reçoit une signification entièrement épistémique, appuyée sur l'idée selon laquelle la probabilité est le rapport d'une partie à la totalité à laquelle elle appartient. Ancillon la définit comme un double rapport, portant d'une part sur la connaissance elle-même, de l'autre sur son mode de production. Ainsi en est-il de la probabilité objective, Ancillon écrivant (p. 12):

« On pourrait définir la probabilité objective le rapport qu'il y a d'un côté entre ce que le sujet est pour nous qui le connaissons en partie, et ce qu'il est en lui-même; de l'autre entre le degré de justesse, de précision et d'exactitude que nous avons mis dans l'application des règles du raisonnement et de la méthode qui nous sont connues, et le degré de sûreté

dont ces règles seraient susceptibles en elles-mêmes et maniées par des esprits supérieurs. »

Autrement dit, la probabilité objective est à la fois une connaissance partielle, puisqu'il s'agit du « rapport [...] entre ce que le sujet est pour nous qui le connaissons en partie, et ce qu'il est en lui-même », et un degré d'évidence partielle, puisqu'elle est le rapport entre le degré de justesse mis en œuvre par le sujet connaissant dans l'application des règles logiques et la démarche que prescrivent par elles-mêmes ces règles.

La probabilité subjective est également définie comme un rapport ; rapport entre un degré d'assentiment partiel et le degré de croyance maximal, c'est-à-dire celui où le sujet connaissant appréhende la proposition comme certaine. La probabilité subjective est, écrit Ancillon (p. 12),

« le rapport qu'il y a entre l'état où l'âme se trouve avec un degré quelconque d'assentiment et de persuasion, et l'état où elle est quand elle croit avoir le sentiment complet de l'évidence et de la certitude ».

Dans les deux cas, la probabilité apparaît donc comme un rapport, ou comme le dit Ancillon qui ne distingue pas les deux termes, une fraction: « une fraction logique et morale d'un Tout pareillement logique et moral » (p. 16). C'est alors l'impossibilité pour ce rapport de recevoir une expression mathématique que le second moment de l'analyse d'Ancillon va s'employer à établir en développant sa critique de la possibilité même d'une mathématisation du probable.

## Critique du projet d'évaluation numérique de la probabilité

L'argument principal qu'Ancillon oppose au projet de construction d'une théorie mathématique des probabilités porte précisément sur la détermination de ce rapport:

« La raison de l'inutilité de tout ce qu'on appelle définition de la probabilité, quand même on appellerait le calcul et la géométrie à son secours, ne serait-elle pas l'impossibilité où nous sommes de déterminer le rapport qui se trouve entre le nombre et la force des preuves qui constituent la probabilité, et le nombre et la force de celles qui sont nécessaires pour la démonstration, et d'évaluer ainsi par rapport au tout, la fraction dont une probabilité quelconque donne l'idée », (p. 16-17).

La racine du raisonnement développé par Ancillon est celle-ci: puisque la probabilité est une partie de la certitude, il faudrait, pour l'exprimer exactement, pouvoir établir précisément le rapport entre le « poids » - pour utiliser un terme emprunté à Bernoulli, mais que ne reprend pas Ancillon - des arguments probables et celui des arguments qui démontrent avec certitude. Or, dit-il, ce rapport « reste toujours incalculable », la partie étant ici incommensurable avec [...] le résultat

entier [...] qui constituerait la certitude ». Comment comprendre cette incommensurabilité ?

L'argumentation mise en œuvre par Ancillon prend d'abord pour objet ce qu'il appelle le « principe de la probabilité ». Le principe qui est à la base du calcul des probabilités consiste, selon Ancillon, à admettre qu'on peut 1° identifier un événement futur comme probable, 2° évaluer numériquement le degré de croyance de la proposition qui affirme la probabilité de cet événement futur. Qu'Ancillon considère ici un événement probable ne signifie pas qu'il confère à la probabilité une signification physique. La mesure porte bien sur une probabilité épistémique, car c'est bien la probabilité d'une proposition qui est ici mesurée, mais une proposition qui affirme le caractère contingent d'un événement futur. Ancillon entreprend alors de montrer que le principe sur lequel repose l'estimation de la probabilité, soit pour exprimer en général le caractère probable d'une proposition, soit pour déterminer son degré de probabilité, « bien loin d'être susceptible de l'évidence qui accompagne des énoncés arithmétiques et géométriques, paraît même ne pas s'accorder avec les premières règles du raisonnement et d'une saine logique ».

1° La critique du raisonnement par lequel on affirme la probabilité de réalisation d'un événement futur consiste à reprendre une argumentation d'inspiration humienne (mais sans référence explicite à Hume, Ancillon ne précisant d'ailleurs à aucun moment les sources sur lesquelles s'appuie son analyse). Ce raisonnement suppose que l'on accepte la thèse de l'uniformité des lois causales, autrement dit le principe selon lequel « ce qui est arrivé arrivera encore, et arrivera par la raison qu'il est arrivé déjà » (17). Or, les fréquences observées de réalisation d'événements ne concernent que les événements passés. Utiliser ces observations passées pour en inférer la réalisation future, implique donc d'imaginer une relation causale derrière la relation de succession observée: (18).

« Il faut, pour rendre légitime la conséquence que l'on tire tous les jours de la répétition de certains phénomènes, supposer entre cette répétition et le jugement qu'elle amène, quelque loi, ou prouvée ou simplement adoptée, qui les lie dans notre esprit et supplée à ce que le seul retour de l'objet n'indique point ».

Ancillon invoque à la source du principe de causalité non une règle rationnelle, mais une cause psychologique: la confiance spontanée de tout individu à croire ce qu'il voit, jointe à une paresse naturelle: « c'est une entreprise pour lui de douter, dit-il, au lieu que c'est son allure naturelle de croire » (19). La répétition de l'observation d'une succession entre deux faits, et plus largement le constat général de l'uniformité du cours des choses, aussi bien physiques que morales, accoutume l'individu à supposer l'existence d'une loi de production, par conséquent une action constante de A sur B. Cela n'invalide pas le principe de causalité, qui reste « très valable dans la vie commune » note Ancillon, mais lui assigne une source

irrationnelle. Nous n'avons pas de raison de postuler une relation de causalité entre deux faits dont on a constaté à plusieurs reprises la succession ; celle-ci n'est que l'effet de notre tendance, par paresse, à supposer que les choses se répètent à l'identique.

Ancillon reprend à son tour l'exemple classique du lever du soleil. Mais, au lieu de se livrer à un calcul pour mesurer la probabilité de son lever demain à partir du nombre de ses levers antérieurs, comme le faisaient par exemple Buffon ou Laplace, il invalide immédiatement un tel calcul en posant que la seule raison qui, apparemment, nous porte à croire au lever du soleil demain est que nous avons observé plusieurs fois son lever antérieur. Or cette raison est tellement inconsistante, qu'elle ne peut suffire à engendrer cette croyance. Il faut lui adjoindre un ensemble de tendances psychologiques, telle que la disposition à croire plutôt qu'à douter, notre tendance à croire ce que nous avons l'habitude de croire, ce qui nous tranquillise, ce qui s'accorde avec nos désirs, etc. Bref, le fondement de l'inférence causale n'est pas à chercher dans une opération de l'entendement, mais il mobilise, dit Ancillon, « l'homme tout entier » et le « tissu de ses penchants, de ses besoins et de tout son être ».

En conséquence, la source de l'inférence causale à partir de laquelle on prétend calculer la probabilité d'un événement futur est irrationnelle et hétérogène. Elle ne résulte pas d'une déduction logique, mais d'un mélange de tendances, de besoins, de penchants d'origine et de forces diverses. Et elle ne peut donc autoriser un traitement scientifique de la probabilité. En résumé, l'argumentation ici déployée par Ancillon vise à dénoncer l'impureté rationnelle de la probabilité.

2° S'il s'agit maintenant non plus de déterminer un événement ou une proposition comme probable, mais d'évaluer numériquement un degré de probabilité, la critique développée par Ancillon consiste à affirmer l'impossibilité d'en effectuer le calcul, à raison de l'impossibilité où nous sommes d'identifier la totalité dont la probabilité est une partie. De la définition selon laquelle la probabilité est le rapport d'une partie à une totalité – « le rapport de telle somme de degrés de probabilité au tout dont on suppose qu'elle fait partie » écrit Ancillon p. 21 –, il résulte que pour mesurer une probabilité, il faut rapporter la mesure de la quantité partielle à celle de la quantité totale. Or, cette quantité totale n'a pas d'existence pour nous: nous ne pouvons la déterminer. Ou encore, écrit-il, le dernier terme est « inconnu et inassignable ». Et ceci vaut aussi bien si l'on suppose que a) la probabilité s'applique à un événement ou b) qu'elle mesure un degré de croyance.

a) Dans le premier cas, précise Ancillon,

« je sais, ou je puis savoir par l'expérience, combien de fois depuis l'origine du monde le soleil s'est levé, les astres ont parcouru leurs orbites suivant des lois connus [...] combien de fois les hommes ont vécu tel nombre d'années, dit la vérité ou cédé à l'attrait de mensonge ; combien de fois dans des

combinaisons appelées fortuites, telles chances se sont présentées: jusqu'ici il ne faut que voir, observer, compter. Mais pour aller plus loin et vouloir exprimer par chiffres ou autres signes le rapport qui se trouve entre le nombre de phénomènes semblables que je tiens et celui de tous les phénomènes du même ordre qui peuvent ou doivent probablement se manifester encore, il faudrait que je tinsse le dernier chaînon d'une chaîne dont je ne tiens que la partie antérieure, et dont celle qui est devant moi ne peut avoir qu'une longueur indéterminée, ce qui la rend incapable de décider de la valeur de celle qui est connue ».

En modernisant le langage d'Ancillon, on pourrait interpréter son raisonnement de la manière suivante: si les probabilités sont mesurées par les fréquences relatives, il faut pouvoir rapporter le nombre des cas observés à celui des cas possibles. Or on ne peut définir ce nombre. Autrement dit, on ne peut connaître l'univers des possibles. Ce n'est pas que cette totalité des cas possibles n'existe pas. Elle existe en soi, pour une intelligence supérieure, mais nous ne pouvons l'appréhender entièrement. Nous ne pouvons donc déterminer de manière fixe la limite maximale de cette totalité, ce qu'Ancillon appelle le « dernier terme » ou le « point de comparaison » à distance duquel se situe la probabilité cherchée. Ancillon dénonce donc comme illusoire la détermination numérique de la probabilité à raison de la « mobilité du point de comparaison » (p. 23) à laquelle on la rapporte.

Comment comprendre cet argument d'Ancillon ? Tout se passe pour lui comme s'il n'appartenait pas au mathématicien de définir l'univers des possibles, comme si celui-ci existait en soi et de manière absolue, indépendamment de l'opération consistant à le construire, de telle sorte que cet univers existe, certes, mais nous demeure inaccessible. En ce cas, Ancillon n'a pas tort: vouloir mesurer la valeur d'une variable sans définir au préalable ses limites de variation est impossible. Mais c'est justement ce que ne fait pas le mathématicien.

b) Si maintenant on considère la probabilité comme un degré de croyance, ou pour parler comme Ancillon un « degré d'assentiment », il nous faudrait pouvoir mesurer le degré de probabilité à partir de la valeur de l'évidence. Or nous sommes confrontés à la même impossibilité de déterminer de manière fixe et invariable le dernier terme, à savoir ici le maximum d'évidence. Mais, Ancillon ajoute deux arguments complémentaires à l'argument précédent:

1° Les degrés d'assentiment sont des sentiments relatifs: on éprouve une proposition comme plus probable qu'une autre, donc par comparaison avec une autre proposition. En conséquence, ce qui est éprouvé comme le plus haut degré d'assentiment pour l'un ne le sera pas nécessairement pour un autre.

2° Il est impossible, dit-il, de construire un « psychomètre », c'est-à-dire un instrument permettant de mesurer la force persuasive d'une proposition. Certes, la probabilité subjective mesure « la force avec laquelle une proposition agit sur l'esprit », et on devrait donc pouvoir en mesurer les degrés d'intensité. Mais, cette

intensité s'éprouve ; elle est de l'ordre du sentiment. Et ce sentiment n'a pas un fondement rationnel, il est le fruit de facteurs hétérogènes, affectifs et variables d'un individu à l'autre (p. 30):

« Ce que nous avons dit plus haut, des sources ou des principes de la probabilité, en la distinguant en probabilité objective, subjective et mixte, fait voir que ce n'est point avec l'entendement seul de l'homme dont la marche est assez simple et assez connue, que s'engage celui qui veut assujettir ses jugements probables à des règles précises, mais que c'est sur l'homme tout entier que portent ses recherches, sur son tempérament, son éducation si différente, ses circonstances locales, ses penchants innés, ses passions, ses caprices, ses goûts, ses intérêts, sur tout ce qu'il y a de plus ennemi de l'ordre et de la régularité. Vouloir se conduire dans ce labyrinthe par le fil d'une logique arithmétique, c'est vouloir porter dans le chaos le compas et la balance qui doivent en mesurer et en peser les éléments confondus. »

La racine de la difficulté que pointe ici Ancillon est celle que rencontre toute tentative de mesure *directe* du degré de croyance, conçu comme donnée de nature psychologique. Et c'est sur cette même idée que conclut Ancillon:

« Il semble donc qu'on ait cru de tout temps, qu'on croie encore que de ce que l'observation et l'expérience nous ont appris sur cette manière particulière de raisonner de l'âme, il pourrait un jour naître une véritable science, démontrée comme la logique, et sure comme la géométrie ; cependant j'ai des doutes sur l'exécution possible de ce plan, que j'ai tâché de justifier dans ce mémoire, et que je crois pouvoir résumer en deux mots avec les raisons sur lesquelles ils se fondent. La logique de la vérité ou du certain est possible, elle peut former une science, parce qu'elle a un objet distinct ou qui peut le devenir ; c'est la raison, l'entendement, qu'on envisage seul et abstraction faite de tout ce qui embarrasse et obscurcit sa marche. La doctrine du probable ne me paraît pas pouvoir jamais former une logique proprement dite, ou une science, parce qu'elle porte sur un objet confus et qui le restera toujours ; c'est l'homme tout entier avec toutes les déterminations génériques, spécifiques, individuelles, locales, j'aurais presque dit momentanées, qui entrent dans l'idée qu'il faut s'en faire, et qui à chaque instant le font raisonner et croire autrement qu'une logique sévère ne peut le permettre ».

## Conclusion

L'intérêt de ce mémoire tient à sa tentative de penser rigoureusement une probabilité épistémique et à la mise en évidence des difficultés que soulève le projet d'évaluation numérique de la probabilité subjective. Il y a là de la part d'Ancillon des aperçus tout à fait pertinents, qui seront repris ultérieurement par la tradition probabiliste, mais qu'Ancillon ne peut mettre à profit. S'il ne peut surmonter les difficultés qu'il aperçoit, ce n'est pas seulement parce qu'il ne

possède pas les outils dont dispose le mathématicien ; c'est aussi parce qu'il se méprend sur la nature du raisonnement probabiliste, et cela doublement: 1° il suppose une existence préalable de l'espace probabilisé indépendamment de sa construction par le probabiliste, 2° il envisage une évaluation directe des degrés de croyance, à la différence de ce que feront les subjectivistes du XX<sup>e</sup> siècle, pensant la probabilité subjective par l'intermédiaire de la notion de pari.

La question se pose également de savoir quel est l'impact des *Doutes* d'Ancillon sur le développement de la théorie mathématique des probabilités. À cette question, on peut répondre de deux manières:

1° Sur la construction même de la théorie mathématique, le mémoire d'Ancillon n'a sans doute eu aucune influence directe, car d'une part il intervient à un moment où le calcul des probabilités a déjà atteint un raffinement considérable et a manifesté sa fécondité, et de l'autre il ne traite pas directement des concepts et principes du calcul, donc lui demeure en quelque sorte extérieur. À cet égard, les *Doutes* d'Ancillon ne sauraient avoir la portée théorique qu'eurent les *Doutes* de d'Alembert (1767) sur l'applicabilité de la théorie mathématique.

2° Sur la diffusion du calcul des probabilités auprès des savants et des lettrés, le mémoire d'Ancillon a pu jouer un rôle de frein en venant conforter la résistance qu'il a rencontrée dans son élaboration comme dans ses applications. Mais ce rôle est difficile à évaluer. Qui a eu connaissance du texte d'Ancillon ? On ne peut le savoir précisément. En revanche, le prestige de l'Académie de Berlin, notamment en France et en Allemagne, la renommée de Louis-Frédéric Ancillon à son époque, son rôle de passeur de la philosophie sceptique anglaise, puis de la philosophie kantienne – même si ce passage est déformant – invitent à faire l'hypothèse que cette influence ne fût pas négligeable. Cependant, les références à ce mémoire sont fort rares dans la tradition probabiliste, qu'elle soit mathématique ou philosophique. Et il faut avouer que la publication de ce texte intervient à un bien mauvais moment. Les événements politiques et militaires, en France et en Europe, mobilisent de façon impérieuse et autrement dramatique, l'attention des lecteurs potentiels du mémoire d'Ancillon.

Enfin, indépendamment de la question de la postérité effective de ce texte, on peut remarquer qu'il s'offre comme un bon témoin des difficultés et des objections que devait rencontrer le projet même de théorie mathématique des probabilités, non seulement dès le XVIII<sup>e</sup> siècle, mais surtout plus tardivement au XIX<sup>e</sup> et même au XX<sup>e</sup>.

## Bibliographie

D'ALEMBERT, J. (1767): *Doutes et questions sur le calcul des probabilités*. In *Œuvres*, Paris, Belin, 1821, vol. I.

- AZOUVI, F. (1991): *De Königsberg à Paris: la réception de Kant en France 1788-1804*, Paris: Vrin.
- CHARLES, S. (2003): *Berkeley au siècle des Lumières. Immatérialisme et scepticisme au XVIII siècle*, Paris: Vrin.
- CHARLES S., LAURSEN J. C., POPKIN R. H., AND ZAKATISTOV'S A. (2001): Hume and Berkeley in the Prussian Academy: Louis Frederic Ancillon's "Dialogue between Berkeley and Hume" of 1796. In: *Hume Studies*, vol. XXVII, n° 1, 85-98.
- COMTE, A. (1975): *Cours de philosophie positive*, rééd. Paris, Herman.
- COUMET, E. (2003): "Auguste Comte et le calcul des chances, aberration radicale de l'esprit mathématique". *Mathématiques et Sciences Humaines*, 162, 9-17.
- HAAG, E. (1846): *La France Protestante ou Vies des Protestants*. Paris, Joël Cherbuliez, vol. 1.
- KEYNES, J-M. (1921): *A Treatise on Probability*. New York: Macmillan and Co.
- MICHAUD, L-G. (1843): *Biographie universelle ancienne et moderne*, Paris, A. Thoissier Desplaces, tome I.
- TODHUNTER, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability: from the time of Pascolo that of Laplace*. Cambridge & London, MacMillan and Co ; rééd. New York, Chelsea Publishing Company, 1949.



## CAPÍTULO 18

# La génesis del primer tratado moderno sobre Probabilidad en España

FRANCISCO JAVIER MARTÍN-PLIEGO LÓPEZ  
Universidad Rey Juan Carlos

JESÚS SANTOS DEL CERRO  
Universidad de Castilla-La Mancha

### Introducción

El objeto de este trabajo es aproximarnos al autor, entorno y la propia obra que representa el primer tratado moderno sobre el cálculo de probabilidades publicado en España.

El comandante de artillería Diego Ollero publicó en 1879 la primera edición de su *Tratado de Cálculo de Probabilidades* destinado a ser manual para la formación de los cadetes de la Academia de Artillería de Segovia. Desde los inicios de la dinastía borbónica el ejército y, en particular, los oficiales formados en las distintas academias militares jugarán un papel importante en la absorción y transmisión de los avances tecnológicos y científicos modernos europeos a la que ellos mismos realizarán algunas aportaciones en distintos ámbitos.

Este trabajo completa otro ya publicado sobre el citado tratado, con lo que esperamos aportar nuevos aspectos que ayudarán a comprender mejor la

importancia de esta obra que, por otra parte, se publica algunos años después de las principales obras que Ollero utiliza como referencia tales como los tratados de Laplace, Lacroix y Liagre.

## Entorno político y social

Las instituciones militares creadas por los Borbones cuya “política muy meditada y planificada la de recurrir a oficiales y marinos para que sean ellos- por su formación- quienes se encargaran de recorrer Europa para informarse de los avances científicos (aparte de las cuestiones castrenses) y difundirlas y aprovecharlas en España”<sup>1</sup>, adquirirán un papel relevante en la ciencia española.

Durante el siglo XVIII los ejércitos van adquiriendo una complejidad en su organización y desenvolvimiento que hacen necesario una formación científica completa para abordar cuestiones relativas a arquitectura militar, balística, estrategia militar, organización interna, etc. Por tanto había que reunir los conocimientos de la ciencia moderna y estudiar sus aplicaciones a cuestiones balísticas propias de un ejército moderno. En este sentido, “*los gobiernos reconocían el beneficio de las innovaciones tecnológicas para la industria militar, fomentaban la formación de mentes con inventiva e ingenio, de hombres con posibilidades que en el caso de España fueron enviados al extranjero por los sucesivos gobiernos con el propósito de mantener el nivel científico de nuestro país a un nivel europeo, enriqueciéndolo con el intercambio de conocimientos y la participación en expediciones científicas, prácticas frecuentes y habituales en todo el siglo XVIII*”<sup>2</sup>. Ollero en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales trata el tema “*Los progresos de las armas de fuego en su relación con las ciencias matemáticas*”<sup>3</sup>, alude al Cálculo de Probabilidades como una de las disciplinas científicas que contribuyen al desarrollo de la Artillería principalmente en lo que se refiere a la precisión de los proyectiles.

Los Borbones crean un ejército permanente en el que apostarán por la institución de oficiales mediante la creación de academias militares. Como muestra de la importancia de una nueva clase social de militares ilustrada encontramos desde finales del siglo XVIII la presencia de militares en instituciones académicas y culturales como Academias Reales, Sociedades Económicas de Amigos del País, etc., cuya labor de difusión de las ciencias modernas fue en general muy destacada.

---

<sup>1</sup> Cepeda Gómez, José en el prólogo a Herrero Fernández-Quesada, María Dolores (1990): *La enseñanza militar ilustrada. El Real Colegio de Artillería de Segovia*. Segovia.

<sup>2</sup> Herrero Fernández-Quesada, María Dolores (1990): *La enseñanza militar ilustrada. El Real Colegio de Artillería de Segovia*. Segovia, p. 27.

<sup>3</sup> Ollero, Diego (1898): *Los progresos de las armas de fuego en su relación con las Ciencias matemáticas*. Discurso de recepción como miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Imprenta de L. Aguado. Madrid.

Ollero en su discurso de ingreso como miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, leído el día 29 de Junio de 1898, cita a otros militares que fueron miembros de esa misma institución como Pedro de la Llave, Fernández de los Senderos, Luján Valera y Odriozola y Balanzat. En este siglo XVIII, que se inicia con la dinastía borbónica y especialmente con Carlos III lo militar adquiere una relevancia social de primer orden. Según Castrillo Mazerés *“los oficiales, por su excelente formación, desbancarían en la administración a los viejos funcionarios y burócratas del tiempo de los Austrias: viajan, conocen, analizan, preguntan e investigan: salen al exterior, conocen lo que se está realizando en otros países y a su regreso dictan medidas buscando la eficacia. El resto de la sociedad se ve impulsada a seguir la corriente de buenas o malas maneras: la vieja nobleza, desplazada ante las casacas, y los textos en lenguas extranjeras, abandona sus recelos e impulsa a sus hijos para obtener capitánías, coronelías, en destacados regimientos; la naciente burguesía urbana ve en la oficialidad militar un camino de progreso y ascenso social...”*<sup>4</sup>

El siglo XVIII se caracteriza por una apertura y permeabilidad de España a Europa en general y por un contacto continuado de científicos europeos y, por lo tanto, con la introducción de la ciencia moderna en nuestro país. No obstante, existieron precedentes durante el último tercio del siglo XVII entre los que destaca figuras como José Zaragoza y Juan Caramuel.

Tuvo especial acogida durante el siglo XVIII en las academias militares la enseñanza de las ciencias de carácter matemático las cuales formaran parte rápidamente de los programas de formación de los oficiales. Especialmente destacable es el impulso dado por el tercer Borbón, Carlos III, en cuyo reinado se impulsó la enseñanza de las matemáticas, la creación de observatorios astronómicos y las escuelas militares.

Las academias militares contribuyeron también a la publicación de tratados y manuales para la formación de los oficiales. El primer tratado editado en la Academia de Artillería de Segovia es el primer tomo del curso de matemáticas de Pedro Gianinni<sup>5</sup> que comenzó a imprimirse en 1779. Este autor es traído desde Italia por el Conde de Gazola, principal impulsor de la creación de la Academia de Artillería de Segovia en 1764, a propuesta de Tanucci, fiel colaborador de Carlos III.

Es precisamente en esta Academia, poco menos de un siglo después, donde ingresa como cadete Diego Ollero y en la que desarrollará su labor docente y para la que escribirá sus obras más importantes.

---

<sup>4</sup> Castrillo Mazerés; F. (2000): *La Historia del Museo del Ejército en sus hombres*. Militaría, 14, 95-111, p. 97.

<sup>5</sup> Giannini, Pedro (1779): *Curso matemático para la enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio Militar de Artillería*, Tomo I. Madrid.

## Aspectos biográficos de Diego Ollero

Nació en Porcuna (Jaén) el 16 de diciembre 1839 y fallece el 22 de agosto 1907 en Écija (Sevilla). Es hijo de Manuel Ollero y María de la Cabeza Carmona. El grado más alto que alcanzó dentro del ejército fue el de General de División, otorgado el 17 de marzo de 1906, al que accedió según su hoja de servicios por sus relevantes méritos y servicios y notables inventos científico-militares.

En la siguiente fotografía, cedida por la Biblioteca de la Academia de Artillería de Segovia, vemos a Diego Ollero. Tenemos constancia también de la existencia en el Museo del Ejército de un cuadro obra del pintor J.M. Villaoz y que fue donación de su viuda. Francisco Castrillo destaca de esta pintura lo siguiente: *“Lo vemos en la pintura del Museo con insignias de General de División y las coronelas de Artillería. El plumero blanco es de Plana Mayor. El uniforme es el de la Regencia de María Cristina. Lleva dos cruces del Mérito Militar y la Medalla de la Guerra Carlista. Al fondo el Alcázar de Segovia”*.



Ingresó como Cadete en el Colegio de Artillería el 4 de Agosto de 1853. Desde el 12 de mayo de 1859 hasta mediados de octubre de 1866 fue ayudante de profesor en el Colegio de Artillería con alguna leve interrupción en el cargo. Desde esa última fecha hasta finales de enero de 1870 fue profesor en la Academia de

Artillería, profesión que vuelve a ocupar desde marzo de 1876 hasta finales de octubre de 1879. Ocupó cargos diversos en el Ministerio de la Guerra, en la Junta de Artillería, en el Museo del Ejército, en una Fundición de Bronce de Sevilla, etc. En el Museo del Ejército ocupó el cargo de Director del mismo desde enero de 1893 hasta finales de mayo de 1898.

Es interesante destacar, según se menciona en su hoja de servicios, que por Real Orden de 23 de Diciembre de 1880 se le concedió el empleo de Teniente Coronel “*en premio de la inteligencia, aplicación y laboriosidad que demostró en la obra de que es autor titulada **Cálculo de probabilidades** declarada de texto en la Academia de Artillería*”. Vemos pues cómo esta obra sobre el cálculo de probabilidades no sólo es un argumento para un ascenso en su carrera militar sino que también forma parte del programa formativo de los oficiales de artillería del ejército español de la época. También es declarada obra de texto para la Academia de Artillería la titulada *Cálculo infinitesimal* de la que es coautor el capitán Tomás Pérez Griñón.

También le sirve para promocionar al empleo de Coronel del ejército en 1884 la publicación de su obra *Balística Experimental*

No sólo existe un interés explícito por los adelantos científicos que se producen fuera de España que tienen su concreción práctica en la realización de manuales sobre balística, cálculo de probabilidades, cálculo infinitesimal, ... sino que también se suceden visitas al extranjero con el fin de comprobar in situ la situación de ciertas industrias como la casa Krupp en Essen (Alemania) a la que Ollero acude en 1891 durante dos meses en compañía de otros dos militares: Eduardo D'Ozouville y Cruz Álvarez y José Ramón de Cevallos y Avilés, con el “*fin de estudiar los adelantos y novedades del material de guerra*”. También participa en la comisión organizadora para la Exposición Universal de Chicago en 1892. En su hoja de servicios también consta la realización de un viaje a Francia, Alemania, Bélgica, Suiza e Italia al que dedica prácticamente todo el mes de octubre de 1905 sin especificar el motivo concreto del mismo.

Como se ha mencionado más arriba fue miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde Junio de 1898 y el último cargo que ocupó fue el de Gobernador Militar de Segovia desde marzo de 1902 hasta diciembre de 1905.

Diego de Ollero es autor de varias obras relacionadas con la formación de los oficiales de artillería. Destacaremos tres obras. En la primera dedicada a la balística<sup>6</sup>, en la introducción de su libro al describir las partes en que se divide el estudio de la Balística señala que una de ellas es la “*Aplicación del cálculo de probabilidades al tiro de las armas de fuego*”. Le dedica el capítulo IV que comprende las páginas 325 a 397. El contenido de este capítulo se refiere a la

<sup>6</sup> Ollero, Diego (1890): *Balística*. Imprenta del Cuerpo de Artillería. Madrid.

aplicación de las nociones del cálculo de probabilidades a cuestiones como la precisión del tiro, errores probables, etc.

Respecto del *Tratado del Cálculo de Probabilidades*, hemos de constatar la publicación de cuatro ediciones cuyo contenido no sufre destacadas modificaciones:

Primera edición: realizada en Segovia por la Imprenta de Pedro Ollero en 1879.

Segunda edición: realizada en Madrid por el Establecimiento Tipográfico de la Dirección General de Artillería en 1883.

Tercera edición: realizada en Madrid por la Imprenta del Cuerpo de Artillería en 1896.

Cuarta edición: realizada en Madrid por la Imprenta de Eduardo Arias en 1913.

Publicó también un *Curso de Cálculo Infinitesimal* en colaboración con T. Pérez Griñón, cuya segunda edición aumentada y revisada es de 1907, el mismo año en que Ollero fallece.

En la biblioteca de la Academia de Artillería de Segovia se encuentran tanto los libros de Liagre como el de Lacroix cuya influencia como veremos más adelante es notable en la propia obra de Ollero. Es preciso decir que Liagre era militar y Director de Estudios de la Escuela Militar y Secretario Perpetuo de la Academia Real (Bélgica).

### **Análisis del *Tratado de Cálculo de Probabilidades***

En el año 1879 Diego Ollero publica su *Tratado de cálculo de probabilidades* que representa el primer manual moderno sobre el cálculo de probabilidades en castellano en donde se recogen influencias claras de ciertos científicos como Gauss, Laplace, Lacroix, Liagre, etc.

El objetivo que persigue Ollero en su tratado es el conocimiento de las leyes que regulan el mundo material y para ello se requiere de las ciencias físico-matemáticas. La observación, lo empírico, es el punto de partida que permite formular especulaciones sobre el enunciado de aproximaciones teóricas de las leyes naturales. Estas formulaciones van siendo ratificadas, perfeccionadas o generalizadas a partir de la observación y aplicación a nuevos casos. Sin embargo, la imperfección de los medios de realizar dichas observaciones o experiencias es el origen de que tanto los datos como las leyes puedan alcanzarse aproximadamente. Esta imperfección es la que justifica el estudio y la aplicación del Cálculo de Probabilidades.

A pesar de las críticas que se han formulado sobre distintos planteamientos y la falta de ciertas demostraciones, constata indirectamente el alto nivel del Tratado de Ollero. Según Sánchez-Lafuente da la sensación de que la estadística estaba más avanzada de cómo nos la presentan nuestros catedráticos de las Facultades. En este sentido, debemos apuntar el papel que habían representado las universidades durante los siglos XVII y XVIII. Según Kline “*las universidades francesas de los siglos XVII y XVIII fueron inactivas en matemáticas. ... También en las universidades alemanas la actividad matemática es esos siglos se mantuvo en un nivel bajo... Las universidades italianas tuvieron alguna importancia en el siglo XVII pero perdieron terreno en el siglo XVIII. Cuando se piensa que Pascal, Fermat, Descartes, Huygens y Leibniz no enseñaron nunca en ninguna universidad y que Kepler y Galileo, aunque enseñaron durante algún tiempo, fueron matemáticos de corte la mayor parte de su vida, se cae en la cuenta de lo relativamente poco importantes que fueron las universidades*”<sup>7</sup>.

El planteamiento metodológico y la aplicación de herramientas matemáticas que observamos en el Tratado de Ollero corresponden a los de una obra moderna cuyo nivel científico no difiere de las principales publicaciones sobre el cálculo de probabilidades de países como Inglaterra, Bélgica, Francia, etc.

En el Capítulo 1 se dedica a realizar demostraciones matemáticas relativas, principalmente, al cálculo integral. En este capítulo, que comprende aproximadamente las primeras 50 páginas del Tratado, estudia con gran detalle ciertos resultados matemáticos necesarios sobre cuestiones relativas al cálculo de probabilidades, la Teoría de Errores y el Método de los Mínimos Cuadrados.

Conviene destacar que la extensión y profundidad de este capítulo es superior al que realiza Liagre en su *Calcul des Probabilités et Theorie des erreurs*, del que Ollero recibió gran influencia.

Uno de los aspectos más interesantes del texto de Ollero lo constituye, pues, este primer capítulo titulado «Recapitulación de las principales fórmulas que sirven de base al cálculo de probabilidades» en el que se tratan aspectos tales como distintos resultados de combinatoria, análisis complejo, cálculo integral, demostración de la fórmula de Stirling, estudio detallado de ciertas integrales útiles para el cálculo de probabilidades y el Teorema de Fourier así como algunos resultados relacionados. Esto constituye un aspecto diferencial respecto del tratamiento que realiza Liagre de estas cuestiones. Este último solamente repasa en el primer capítulo de su obra cuestiones relativas a la combinatoria y al binomio de Newton y, al final del libro, resume algunas fórmulas sobre el cálculo de probabilidades y la Teoría de Errores. En este capítulo Ollero también realiza un estudio, en este caso mucho más breve que Liagre, de combinatoria. Liagre en

---

<sup>7</sup> Kline, Morris (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I*. Alianza Universidad. Madrid, pp. 525-526.

cambio en su capítulo primero hace un análisis minucioso en el que demuestra varias expresiones relativas a combinaciones, permutaciones y variaciones a lo que añade múltiples ejemplos.

El Capítulo 2 lo dedica Ollero al análisis de la noción de probabilidad y los principios fundamentales del cálculo de probabilidades. Hay que advertir que tanto Liagre como Ollero se encuentran dentro de la tradición laplaciana.

Ollero comparte un principio determinista o concepción determinista de la realidad similar a la visión de la naturaleza de la tradición laplaciana. Persiste también la idea de una inteligencia suprema:

*Un conocimiento perfecto de estas leyes nos permitiría llegar a la solución exacta de cada cuestión, siempre que además estuviesen determinados con todo rigor los datos correspondientes<sup>8</sup>.*

Sin embargo, la ignorancia constituye el origen del concepto de probabilidad y, en definitiva, del cálculo de probabilidades. En este sentido, Ollero afirma que:

*La imperfección de los medios de que podemos disponer para llevar a cabo las observaciones o experiencias es causa de que tanto los datos como las leyes sólo puedan determinarse aproximadamente; y si para comprobar los resultados se multiplica el número de estas experiencias, en cada una de ellas se cometerán evidentemente nuevos errores, pudiendo creerse, por tanto, que éstos no se hayan regidos por ley alguna y si sometidos al azar<sup>9</sup>.*

El cálculo de probabilidades tratará de responder a cuestiones del tipo:

*¿Qué grado de confianza debemos atribuir a los resultados de cada una de las observaciones de determinado género? (...) ¿qué procedimientos conviene seguir y con qué grado de precisión se podrá contar en la determinación de las demás cantidades que de ellas dependen?<sup>10</sup>*

Respecto de la definición de probabilidad tiene también un claro precedente laplaciano:

*El procedimiento que se emplea para dar precisión matemática a estos diversos grados de posibilidad consiste en suponer o concebir descompuesta la prueba o experiencia que pueda dar lugar un suceso determinado en un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, que no tengamos ningún motivo para suponer que uno de ellos se ha de verificar con preferencia a los otros<sup>11</sup>.*

También en este segundo capítulo define la probabilidad compuesta de sucesos independientes, la probabilidad compuesta de sucesos no independientes en cuya

<sup>8</sup> Ollero, Diego (1913): *Tratado de cálculo de probabilidades*. 4ª edición. Madrid, p. 5.

<sup>9</sup> Ollero, Diego (1913): *Ibidem*, p. 5.

<sup>10</sup> Ollero, Diego (1913): *Ibidem*, p. 6.

<sup>11</sup> Ollero, Diego (1913): *Ibidem*, p. 54.

definición utiliza lo que llama «probabilidad modificada del primer suceso», la probabilidad total y el Teorema de Bayes. De estos dos últimos hará un gran uso en varias demostraciones posteriores.

Respecto del Capítulo 3, lo dedica al estudio de la probabilidad de sucesiones o repeticiones de sucesos de un fenómeno, centrándose especialmente en fenómenos dicotómicos, en donde otorga un especial énfasis al Teorema de Bernoulli. Liagre lo analiza también en su capítulo tercero «De las leyes de la probabilidad matemática en la repetición de sucesos». No obstante Liagre antes de entrar al estudio de la Teoría de Errores y el Método de Mínimos Cuadrados, objeto por otra parte de los dos últimos capítulos (4 y 5) del *Tratado de Ollero*, desarrolla un conjunto de tópicos relativos a:

- Del valor venal de las suertes y de las probabilidades. Del contrato aleatorio y del juego en general (Capítulo 4)
- Determinación de las causas por las observaciones. Probabilidad de un nuevo suceso (Capítulo 5)
- Estudio de las causas. Medias y límites. Aplicaciones (Capítulo 6)
- De las leyes de la mortalidad y de la población. De las asociaciones. De los seguros sobre la vida y las cosas (Capítulo 7)

Los Capítulos 4 y 5 y últimos del texto de Ollero constituyen el objeto principal de su obra, siendo lo anterior preparación y exposición, y análisis de nociones necesarias para dicho objeto, que no es otro que la Teoría de Errores y el Método de los Mínimos Cuadrados.

*Vamos a entrar de lleno en el objeto principal que nos hemos propuesto (...) Distinguiremos dos clases de cuestiones: la una, que comprende aquéllas cuyo fin es investigar los valores de las cantidades, valiéndose de mediciones u observaciones inmediatas; la otra, que abraza cuántas se proponen la determinación de estas mismas cantidades, cuando están ligadas, por leyes conocidas, a otras deducidas de la observación<sup>12</sup>.*

En lo que respecta al Capítulo 4, tanto Ollero como Liagre expresan la influencia recibida principalmente de Gauss. Liagre, en concreto, cita a Gauss, Bessel, Baeyer, Encke, Gerling y Laplace como autores que:

*nos han dejado sobre este objeto admirables modelos teóricos y prácticos<sup>13</sup>*

Ollero, por su parte, sigue a Gauss en la determinación de la función de probabilidad de los errores.

<sup>12</sup> Ollero, Diego (1913): *Ibidem*, p. 91.

<sup>13</sup> Liagre, J. B. J. (1852): *Calcul des Probabilités et Théorie des Erreurs, avec des applications aux sciences d'observation en general, et de la géodésie en particulier*. Alexandre Jamar, Bruxelles, p. 11.

*Para determinar esta función emplearemos el método seguido por Gauss, que está basado en el principio de la media diferencial*<sup>14</sup>.

La conclusión, siguiendo a Gauss, a la que llega es que los errores tienden a una función de probabilidad normal o gaussiana.

El Capítulo 5 y último del Tratado de Ollero trata sobre los mínimos cuadrados, cuya notación, al igual que Liagre, es la utilizada por Gauss. La referencia de la obra de Gauss es *Teoría combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1820)<sup>15</sup>.

## Bibliografía

- CASTRILLO MAZERES, F. (2000): *La Historia del Museo del Ejército en sus hombres. Militaría*, 14, 95-111.
- GAUSS, C. F. (1820): *Theoría Combinationis Observationum Erroribus Minimus Obnoxiae*. Royal Society of Gottingen. Facsimil y traducción al inglés en SIAM. Philadelphia. 1995.
- HERRERO FERNÁNDEZ-QUESADA, M. D. (1990): *La enseñanza militar ilustrada. El Real Colegio de Artillería de Segovia*. Segovia.
- KLIN, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I*. Alianza Universidad. Madrid.
- LACROIX, S. F. (1864): *Traité Élémentaire du Calcul des Probabilités*. 4ª edición. París.
- LIAGRE, J. B. J. (1852): *Calcul des Probabilités et Théorie des Erreurs, avec des applications aux sciences d'observation en general, et de la géodésie en particulier*. Alexandre Jamar, Bruxelles.
- MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): "Historia de la probabilidad en España". *Revista de Historia Económica*. Año XV, Invierno 1997, nº 1.
- OLLERO, D. (1890): *Balística*. Imprenta del Cuerpo de Artillería. Madrid.
- (1898): *Los progresos de las armas de fuego en su relación con las Ciencias matemáticas*. Discurso de recepción como miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Imprenta de L. Aguado. Madrid.
  - (1913): *Tratado de Cálculo de Probabilidades*. 4ª edición. Madrid.
- SÁNCHEZ-LAFUENTE, J. (1973): *Historia de la estadística como ciencia en España (1500-1900)* II. *Estadística Española*. nº 60 y 61.
- SANTOS DEL CERRO, J. (2004): "Diego Ollero: el primer tratado moderno español sobre cálculo de probabilidades". En AHEPE (2004). *Historia de la Probabilidad y la Estadística (II)*. Delta Universidad, Madrid.

<sup>14</sup> Ollero, Diego (1913): Op. Cit., p. 118.

<sup>15</sup> Gauss, C.F. (1820): *Theoría Combinationis Observattionum Erroribus Minimus Obnoxiae*. Royal Society of Gottingen. Facsimil y traducción al inglés en SIAM. Philadelphia. 1995.

# Los modelos de ecuaciones estructurales: Una revisión histórica sobre sus orígenes y desarrollo

GREGORIA MATEOS-APARICIO MORALES  
Universidad Complutense de Madrid

### Introducción

Una exposición del desarrollo histórico de los modelos de ecuaciones estructurales o SEM –acrónimo del inglés Structural Equation Models– puede contribuir a entender el método haciendo explícitos los motivos de su desarrollo.

Para cumplir este objetivo expondremos en primer lugar el por qué de la necesidad de los modelos de ecuaciones estructurales, como herramienta potente para el estudio de las relaciones causales sobre datos no experimentales cuando estas relaciones son lineales, detallando el significado que estas relaciones tienen, de tal manera que la revisión histórica sea eficaz para entender los modelos.

El desarrollo de los modelos que nos ocupan ha sido complejo y proviene de distintas aportaciones que en diferentes ámbitos científicos se han ido realizando en

un periodo largo de tiempo, por ello exponemos las distintas líneas de investigación que han dado lugar a lo que hoy conocemos como modelos de ecuaciones estructurales, desde los inicios del siglo XX hasta 1970 en que K. Jöreskog presenta la primera formulación de Covariance Structure Analysis (CSA), más tarde conocido como LISREL, para estimar un sistema de ecuaciones estructurales lineales.

Después expondremos la alternativa que H. Wold propuso al modelo de Jöreskog, para flexibilizar las condiciones que éste último imponía, y cómo el enfoque de H. Wold del modelo de ecuaciones estructurales, conocido como PLS-Path Modeling, se ha popularizado en el ámbito de las Ciencias Sociales por su adaptación a las condiciones de la información disponible en este campo.

## **Una revisión sobre la necesidad de los modelos de ecuaciones estructurales**

Los modelos de ecuaciones estructurales nacieron de la necesidad de dotar de mayor flexibilidad a los modelos de regresión. En palabras de Bollen (1989): “Podemos mirar estos modelos de diversos modos. Son ecuaciones de regresión con supuestos menos restrictivos, que permiten errores de medida tanto en las variables criterio (independientes) como en las variables dependientes. Consisten en análisis factoriales que permiten efectos directos e indirectos entre los factores. Habitualmente incluyen múltiples indicadores y variables latentes. Resumiendo, engloban y extienden los procedimientos de regresión, el análisis econométrico y el análisis factorial.”

Para entender los términos de los que hablamos, y justificar la necesidad de los modelos de ecuaciones estructurales, revisemos los conceptos sobre las relaciones entre variables y las metodologías para establecerlas.

El objeto de estos modelos son las relaciones causales, pero las relaciones causales entre variables pueden establecerse con una metodología experimental, la que se desarrolla en las ciencias físicas o químicas, o no experimental, la que seguimos en las ciencias sociales y del comportamiento. Con la metodología experimental existe un conocimiento de los fenómenos que permite demostrar que toda variación en la variable causa produce un cambio en la variable efecto, sin embargo en las ciencias sociales y del comportamiento el conocimiento teórico es escaso, no existe la experimentación y de lo único que se dispone es de información estadística. Esto es, en los estudios no experimentales las relaciones causales se inducen a partir de las relaciones estadísticas observadas entre las variables, y la variación entre variables se mide, como es sabido, con la covarianza o la correlación. Pero la covariación entre dos variables significa que los valores de una se dan a menudo asociados a valores de la otra, sin embargo para que exista relación causal, además de existir correlación, los cambios en la variable causa

implicarán variaciones en la variable efecto. La correlación entre variables es una relación simétrica-si "x" tiene un tipo de correlación, positiva o negativa, con "y", entonces "y" tiene el mismo tipo de correlación con "x". Sin embargo, la causalidad es asimétrica, pues si "x" es causa de "y", no se deduce que "y" sea causa de "x". La causalidad implica una dirección del efecto.

Si representamos la relación causal de "x" en "y" mediante una ecuación de regresión lineal de la forma  $y = bx + \varepsilon$ , el término  $\varepsilon$  expresa la variación de "y" por causas distintas de "x", es decir por causas de perturbación aleatorias. Entonces para inducir que "x" sea causa de "y" se exige además de correlación, que se dé la dirección del efecto y el aislamiento de otras posibles causas.

En la investigación experimental se recurre al control experimental sobre las variables para conseguir la dirección de la causalidad, por ejemplo haciendo que los valores de "x" dejen de ser aleatorios y que "y" varíe aleatoriamente dependiendo de "x", entonces, se descarta que la correlación se deba a un efecto de "y" sobre "x". En cuanto al aislamiento, en la investigación experimental, se consigue controlando cualquier otra causa de "y" que no sea debida a la relación entre "x" e "y".

Sin embargo, en la investigación no experimental (ciencias sociales y del comportamiento), se descartan situaciones en las que la causalidad se dé en las dos direcciones. En cuanto al aislamiento, en los casos no experimentales, se usa el control estadístico, exigiendo la incorrelación entre el término de perturbación aleatoria y las variables explicativas.

Una vez expuestos estos términos aclaratorios, podemos decir que los modelos de ecuaciones estructurales constituyen una de las herramientas más potentes para el estudio de las relaciones causales sobre datos no experimentales cuando estas relaciones son lineales. Sin embargo, "A pesar de su sofisticación, estos modelos nunca prueban la causalidad, sólo ayudan a seleccionar entre las hipótesis causales relevantes, desechando aquellas no soportadas por la evidencia empírica(...). Las teorías causales son susceptibles de ser estadísticamente rechazadas si se contradicen con los datos, es decir con las covarianzas o correlaciones entre variables. En cambio, las teorías no pueden ser confirmadas estadísticamente."<sup>1</sup>

## **Las líneas de investigación que han dado lugar a SEM: desde principios del siglo XX hasta 1970**

La técnica del Análisis de la Varianza presentada por R.A. Fisher en 1925 fue pionera en el estudio de las relaciones causales. El Análisis de la Varianza pensado

<sup>1</sup> J.M. Batista Foguet; G.C. Gallart. (2000) *Modelos de Ecuaciones Estructurales*. Cuadernos de Estadística. Ed. La Muralla. Madrid, p. 12.

inicialmente para el análisis de datos experimentales, trata de explicar el efecto de una variable independiente (explicativa) sobre otra variable dependiente (explicada), y establece hasta que punto la variación de la variable dependiente se debe a las variaciones de la variable independiente. Entre los diversos modelos estadísticos diseñados para explicar la variación de una o varias variables dependientes, esto es, para el análisis de relaciones de dependencia, está el modelo de regresión, que tiene en común con el Análisis de la Varianza el analizar la variación de las variables explicadas por otras.

En las Ciencias Sociales, los econométricos han sido los pioneros en el uso de modelos de análisis de dependencia para estudiar la causalidad con datos no experimentales, en la década de los años cuarenta del siglo XX- el concepto de modelo de estructura fue definido por Koopman<sup>2</sup> en 1949-. El término estructural supone que los parámetros no son simplemente medidas descriptivas de asociación sino que revelan una relación causal.

En las ciencias del comportamiento, los primeros psicómetros de principios del siglo XX desarrollan modelos para estudiar variables abstractas, no observables, llamadas constructos, variables latentes o factores, cuyos valores se obtienen a partir de las variables observables. Los modelos más conocidos de ellos son el análisis factorial exploratorio, que, con el importante trabajo sobre análisis de factores publicado por Spearman en 1904<sup>3</sup>, ha tenido gran influencia en el desarrollo de los modelos de ecuaciones estructurales, y el análisis factorial confirmatorio de Jöreskog<sup>4</sup>.

Por otro lado, sociómetros y biómetros sentaron las bases del Análisis Path (análisis de rutas) que describe relaciones de dependencia-que en algún sentido son causales-entre variables latentes. El análisis de rutas es un método para buscar relaciones causa efecto, en las que los coeficientes path miden el grado de relación causal entre las variables, es decir, el grado de variación producida en la variable dependiente por cada una de las variables independientes, permaneciendo las otras constantes.

El Análisis Path es el padre de los modelos de ecuaciones estructurales, una técnica para estimar los parámetros desconocidos de un sistema de ecuaciones simultáneas, de la que Sewall Wright se considera su creador. El biómetro Sewall Wright introdujo en la genética un método para calcular coeficientes path con la

---

<sup>2</sup> Koopmans, T.C. (1949) "Identification problems in economic model construction". *Econometrica*, 17, pp. 125-143.

<sup>3</sup> Spearman, C.(1904). "General intelligence, objectively determined and measured". *American Journal of Psychology*, vol. 15, 201-293.

<sup>4</sup> Jöreskog, K.G.(1969) "A general approach to confirmatory maximum likelihood factor analysis". *Psychometrika*, 34, 183-202.

publicación de su primer artículo<sup>5</sup> en 1918, en el que incluía una aplicación de coeficientes path a un problema sobre factores de crecimiento.

El Análisis Path fue redescubierto por los sociólogos en la década de 1960, aunque como señala Bollen<sup>6</sup>, es sorprendente que los sociólogos y los estadísticos no apreciaran plenamente el trabajo de Wright antes. Sin embargo, una vez observado por los sociólogos Blalock y Duncan, el Análisis Path pronto se extendió a otras áreas, como la estadística y la economía. Aparte del caso excepcional del trabajo de Burks<sup>7</sup> en 1928, el Análisis Path no fue adoptado por los psicólogos, en su totalidad, hasta principios de la década de 1970 (Werts y Linn, 1970)<sup>8</sup>. Según Bollen<sup>9</sup>, "los trabajos de Jöreskog<sup>10</sup>, Keesling<sup>11</sup>, y Wiley<sup>12</sup>, desarrollaron modelos de ecuaciones estructurales muy generales e incorporaron características del Análisis Path en sus presentaciones, lo que desempeñó un papel importante en la popularización del Análisis Path". Su logro fue esencialmente la combinación de elementos del análisis de rutas, que estructuraba las relaciones entre un conjunto de variables, con elementos de análisis factorial.

De esta conjunción de planteamientos, los del Análisis Factorial, que dio lugar a lo que ahora llamamos modelo de medida, que relaciona variables latentes con variables observadas en las de ecuaciones estructurales, y el Análisis Path, con el que se establecen las relaciones entre variables latentes, que ahora llamamos modelo de estructura, se dedujo la base de los modelos de ecuaciones estructurales, en los que se incorpora el error de medida y las relaciones entre variables latentes.

Los modelos de ecuaciones estructurales, como marco general permiten afirmar una dirección en las relaciones entre las variables, y también incorporan las variables no observables, es decir, los factores. Bollen señaló que, si bien las

<sup>5</sup> A. Torner. (2003). *A short history of equation structural models*. En "Structural Equation Modeling" Editado por Pugesek, B.H.; Torner, A. and A. von Eye. Cambridge University Press, p. 86.

<sup>6</sup> Bollen, K. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York: Wiley, p. 6.

<sup>7</sup> Burks, B. S. (1928) The relative influence of nature and nurture upon mental development: A comparative study of foster parent-foster child resemblance and true parent-true child resemblance. *The Twenty-Seventh Yearbook of the National Society for the Study of Education*, vol. 27, 219-316.

<sup>8</sup> Werts, C.E. y R.L. Linn. (1970). Path Analysis: Psychological examples. *Psychological Bulletin*, 74, pp. 193-212.

<sup>9</sup> Bollen, K. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York: Wiley, p. 6

<sup>10</sup> Jöreskog, K.G. (1973). A general method for estimating a lineal structural equation system. En A.S. Goldberger y O.D. Duncan, eds. *Structural Equation Models in the Social Sciences*. New York, Academic Press, pp. 85-112.

<sup>11</sup> Keesling, J.W. (1972). *Maximum Likelihood Approaches to Causal Analysis*. Ph.D. dissertation. Department of Education. University of Chicago.

<sup>12</sup> Wiley, D.E. (1973). The identification problema for structural equation models with unmeasured variables. En A.S. Goldberger y O.D. Duncan, eds. *Structural Equation Models in the Social Sciences*. New York, Academic Press, pp. 69-83.

ecuaciones estructurales no eran nada nuevo, la labor de Jöreskog, Wiley y Keesling proporcionó una base más sólida para dichos modelos.

"Estos trabajos en el área de la psicometría y los realizados en el campo de la sociología, durante la década de 1960 y principios de los años 1970, demostraron el potencial para sintetizar los modelos econométricos con variables latentes en lugar de con variables observadas, y los modelos de medida psicométricos con indicadores vinculados a variables latentes. Sin embargo, su enfoque no establecía un modelo general que pudiera aplicarse a cualquier problema específico. Hubo que esperar el trabajo de Jöreskog (1973), Keesling (1972), y Wiley (1973) para que se propusiera un modelo general"<sup>13</sup>.

En resumen, a lo largo del tiempo se van desarrollando las teorías de psicómetras, económetras, biómetras y sociómetras hasta la cristalización del modelo LISREL (abreviatura de Linear Structural RELations) en los comienzos de la década de los 70 del siglo XX, del que trataremos a continuación.

## **El inicio de los modelos de ecuaciones estructurales: Jöreskog y su modelo de ecuaciones estructurales basado en covarianzas**

El origen de los modelos de ecuaciones estructurales data de 1970 en que el econométra Arthur Goldberger organizó una conferencia sobre modelos que analizaban relaciones causales, a la que invitó a estadísticos, psicómetras, económetras, biómetras y sociómetras, siendo los modelos de ecuaciones estructurales el lugar común de encuentro de todos ellos. En ella se planteó que no sólo tenía interés estudiar la relación entre variables observables y latentes, sino también entre las propias variables latentes.

A esta conferencia, de 1970, fue invitado Karl Jöreskog en Madison, Wisconsin. Fue en ella donde Jöreskog presentó la primera formulación de Covariance Structure Analysis (CSA) para estimar un sistema de ecuaciones estructurales lineales, el cual llegó a ser conocido más tarde como LISREL (Linear Structural RELations)<sup>14</sup>. El artículo de la conferencia fue publicado en *Structural Equations Models in the Social Sciences* de Goldberger y Duncan<sup>15</sup>, donde se incluyó el artículo de Jöreskog<sup>16</sup>, del que Stanley A. Mulaik señala que "Jöreskog unificó, análisis factorial, análisis de estructuras de covarianza y modelos de

<sup>13</sup> Bollen, K. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York: Wiley, p. 7

<sup>14</sup> Ver: Lee M. Wolfle (2003) *The Introduction of Path Analysis to the Social Sciences, and Some Emergent Themes: An Annotated Bibliography*. *Structural Equation Modeling*, 10 (1), p. 2

<sup>15</sup> Goldberger, A. S., & Duncan, O. D. (1973). *Structural equation models in the social sciences*. New York. Seminar.

<sup>16</sup> Jöreskog, K.G. (1973) A General Method for Estimating a Linear Structural Equation System. In: *Structural Equation Models in Social Sciences*, 85-112. A.S. Goldberger and O.D. Duncan (Eds). London: Academic Press.

ecuaciones estructurales lineales, en un modelo general único que respaldó con su famoso programa LISREL."<sup>17</sup> Pero, según lo afirmado por Tomer<sup>18</sup> podemos decir que "el modelo LISREL fue formulado en formas esencialmente equivalentes por Keesling, Joreskog y Wiley en los comienzos de la década de 1970 y por esta razón se llamó, a veces, el modelo JKW".

"James Ward Keesling presentó su formulación del modelo LISREL en 1972, cuando era estudiante del Departamento de Educación de la Universidad de Chicago, bajo la influencia de David Wiley y del estadístico sueco Herman Wold. Keesling, "en el capítulo 7 de sus tesis, presentó un modelo de estructura de covarianzas para el análisis de flujo causal". El modelo lo formula usando una ecuación que presenta variables observadas en función de otras variables observadas. Las varianzas y covarianzas de las variables medidas, exógenas y endógenas, se expresan como función de los parámetros del modelo. Esta expresión fue más tarde modificada por Keesling para permitir la relación entre variables latentes, formulación que es equivalente a los modelos presentados por Jöreskog y Wiley, aunque su expresión es menos clara que la de los últimos.

Karl Jöreskog<sup>19</sup> presentó su primera versión del modelo LISREL, que originalmente llamó Covariance Structure Analysis (CSA), en una forma general en la conferencia organizada por Arthur Goldberger, ya referida anteriormente, en noviembre de 1970. Jöreskog formuló su modelo general usando tres ecuaciones. La primera ecuación presenta la relación entre variables latentes, usando la distinción entre variables exógenas o independientes y endógenas o dependientes. El tercer vector de variables introduce los errores en la ecuación. Dos ecuaciones adicionales expresan las variables observadas como suma de variables latentes y errores de medida. El modelo así formulado está muy cercano a la formulación habitual del modelo LISREL, pero supone una variable observada por cada variable latente. Además Jöreskog indicó la necesidad de extender el modelo para múltiples indicadores por cada variable latente.

Wiley especificó un modelo general, en su debate en la conferencia, sobre el problema de identificación para modelos de ecuaciones estructurales con variables no medibles. Esencialmente, el modelo es similar al especificado por Keesling y al presentado por Jöreskog.

Para entender la fundamentación de los modelos de ecuaciones estructurales referidos, es necesario reorientar nuestro conocimiento de lo que significa el

---

<sup>17</sup> Mulaik, S.A.(1986) *Factor Analysis and Psychometrika: Major Developments* Psychometrika, Vol. 51, No. 1, p. 30.

<sup>18</sup> B.H. Pugesek, A.Tomer & A. von Eye (eds) (2003). *Structural Equation Modeling*. Cambridge University Press, p. 109.

<sup>19</sup> Ver: A. Tomer. (2003). *A short history of equation structural models*. En "Structural Equation Modeling" Editado por Pugesek, B.H.; Tomer, A. and A. von Eye. Cambridge University Press, p. 110.

concepto de *ajuste* de un modelo. En regresión lineal, cuando hablamos de las estimaciones de los parámetros, escogemos aquellas estimaciones que mejor ajustaban el modelo a los datos, en el sentido de que minimizaban los errores de predicción cometidos con el modelo para el conjunto de sujetos de la muestra, con el método de mínimos cuadrados. Por el contrario, en los modelos de ecuaciones estructurales, lo que se pretende ajustar son las covarianzas entre las variables, en vez de buscar el ajuste de los casos. En lugar de minimizar la diferencia entre los valores pronosticados y los observados a nivel individual, se minimiza la diferencia entre las covarianzas muestrales y las covarianzas pronosticadas por el modelo estructural. Este es el motivo por el que también se han denominado modelos de estructura de covarianzas. En este sentido, los residuos son la diferencia entre las covarianzas observadas y las covarianzas reproducidas, pronosticadas, por el modelo estructural teórico

La gran ventaja de este tipo de modelos es que permiten proponer el tipo de relaciones que se esperan encontrar entre las diversas variables, para pasar posteriormente a estimar los parámetros de las relaciones propuestas. Por este motivo se denominan también *modelos confirmatorios*, ya que el interés fundamental es "confirmar" mediante el análisis de la muestra (o muestras) las relaciones propuestas a nivel teórico.

Además de la técnica del modelo general, Karl Jöreskog, junto con el profesor Dag Sörbom, desarrolló el modelo LISREL y el programa informático LISREL. El software proporcionaba un programa fácil y eficaz para los científicos sociales, incluidos los psicólogos, para construir y evaluar modelos de ecuaciones estructurales. Bollen afirmó que "el software LISREL quizás ha sido el principal factor que lleva a la propagación de estas técnicas en el ámbito de las ciencias sociales"<sup>20</sup>. El programa LISREL es un programa de estimación de modelos de ecuaciones estructurales que actualmente se encuentra incorporado como un módulo del paquete SPSS para WINDOWS.

Karl Gustav Jöreskog<sup>21</sup>, padre de los modelos de ecuaciones estructurales, nació el 25 de abril de 1935 en Åmål, Suecia, es actualmente profesor Emérito en la Universidad sueca de Uppsala, en la que es docente de Análisis Estadístico Multivariante, y Miembro de la Real Academia Sueca de Ciencias. También ha sido profesor en la Escuela Noruega de Economía y Administración de Empresas en Bergen, profesor en la Escuela Noruega de Administración de Empresas de Oslo, y profesor visitante en la Universidad de Princeton, además de otros muchos méritos.

---

<sup>20</sup> Bollen, K. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York, Wiley, p. 8.

<sup>21</sup> Uppsala Universitet, Inst för informationsvetenskap, Box 5132751 20 Uppsala, (Sweden). E-mail: karl.joreskog@dis.uu.se

## La evolución de los modelos de ecuaciones estructurales hacia un enfoque más flexible: El modelo PLS-Path Modeling

La historia del desarrollo de los modelos de ecuaciones estructurales está ligada, en un determinado momento, al encuentro entre Karl Jöreskog y Herman Wold. Jöreskog después de terminar sus estudios como profesor de gramática decidió ayudar a un amigo, durante un verano, sustituyéndole en el departamento de estadística de la universidad de Uppsala. El cómo ocurrió el encuentro entre Jöreskog y H. Wold es bien conocido: "Estaba Jöreskog charlando en la habitación de un amigo cuando sonó el teléfono, al otro lado de la línea estaba el profesor Herman Wold, Catedrático del Departamento de Estadística de la Universidad de Uppsala, que necesitaba un asistente de investigación. El amigo de Karl dijo que estaba comprometido con otra actividad y que Karl estaba igualmente cualificado. Él pasó el teléfono a Karl, y así fue como K. Jöreskog se convirtió en asistente de estadística, tema que él no tenía ninguna intención de estudiar. Mientras trabajaba como asistente de investigación, Jöreskog tenía poca idea de lo que el trabajo que estaba haciendo significaba, aunque en lugar de estudiar estadística lo que hizo fue tomar clases de matemáticas. Sin embargo, en el otoño de 1958 H. Wold le dijo que para continuar con la investigación lo que tenía que hacer es estudiar estadística."<sup>22</sup> Al final del curso, debido a las aptitudes para la materia demostradas por Jöreskog, el profesor Wold le invitó a quedarse en la Universidad de Uppsala y continuar su doctorado en el citado departamento de estadística.

Cuando Jöreskog presentó su modelo de ecuaciones estructurales basado en la estructura de las covarianzas, H. Wold propuso un enfoque alternativo a LISREL<sup>23</sup> para la estimación del modelo mediante PLS (Partial Least Squares), ya que estaba en desacuerdo con la aproximación dura, o *hard modeling*, que Jöreskog presentaba. El enfoque de Jöreskog necesitaba fuertes hipótesis sobre la distribución de los datos y gran tamaño muestral. Sin embargo, el enfoque de Wold era mucho más ligero por la falta de hipótesis sobre la distribución de los datos y porque además el algoritmo funcionaba con un número reducido de casos. Por estas razones al enfoque de Wold se le denominó *Soft Modeling* o aproximación blanda.

Vamos a señalar brevemente la diferencia entre los dos enfoques. Los métodos de ecuaciones estructurales funcionan como sistemas de ecuaciones simultáneas, pero la estimación de sus coeficientes basada en el análisis de estructuras de covarianzas se realiza ajustando la matriz de covarianzas, lo que conlleva

<sup>22</sup> Cudeck, R; Du Toit, S. Dag Sörbom, Eds. (2001). *Structural Equation Modeling: Presente and Future*. Scientific Software International, p. 3.

<sup>23</sup> Wold, H. (1982b) Soft modeling: The Basic Design and Some Extensions. In: *Systems under indirect observation: Causality, structure, prediction. Part II*, 1-54. K.G. Jöreskog & H. Wold (Eds). Amsterdam: North Holland.

importantes y "duras" condiciones (normalidad multivariante y tamaños muestrales grandes). Sin embargo, la técnica PLS (Partial Least Squares) estima los coeficientes del sistema de ecuaciones estructurales con el método de mínimos cuadrados, puesto que obtiene soluciones igual de fiables que la técnica basada en covarianzas con menos restricciones, respecto, fundamentalmente, a la distribución de los datos y el tamaño de la muestra, que constituye, como ya hemos comentado, la aproximación "blanda".

Ambos enfoques fueron comparados por ambos en 1982 en "*Soft Modeling: The basic Design and Some Extensions*" en *Systems under Indirect Observation – Causality Structure Prediction*. La conclusión de dicha comparación es que realizando algunos cambios en el algoritmo LISREL de Jöreskog, las estimaciones dadas por ambos enfoques están correladas, aunque con el algoritmo original se conseguían estimaciones más robustas que con el método PLS. Unos años después de esta publicación, debido a la gran difusión que tuvo el enfoque PLS, Harald Martens propuso llamarle PLS-Path Modeling a este enfoque PLS sobre modelos de ecuaciones estructurales, para diferenciarlo de la Regresión PLS.

Sin embargo, a pesar de las ventajas de flexibilidad logradas con la aproximación PLS sobre el método basado en la estructura de las covarianzas, el modelo PLS-Path Modeling no fue muy usado durante algunos años ni en la econometría ni en las ciencias sociales. Incluso, a pesar de que ambas aproximaciones fueron desarrolladas prácticamente al mismo tiempo, su evolución no fue paralela. La razón principal de esta divergencia tiene que ver con el software disponible. El método basado en el análisis de la estructura de las covarianzas contó con el programa estadístico LISREL desde principios de los años 1970, sin embargo, PLS-Path Modeling no tuvo un software disponible durante años hasta que el programa *LVPLS 1.6* de Lohmöller apareció en 1984.

## Bibliografía

- ANDERSON, J. C. y GERBING, D. W. (1988): "Structural equation modeling in practice: A review and recommended two-step approach". *Psychological Bulletin*, 103, 411-423.
- ASHER, H. B. (1976): *Causal modeling. Sage University Paper series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 07-003*. Beverly Hills and London: Sage Publications.
- BLALOCK, H. M. (1961): "Correlation and causality: The multivariate case". *Social Forces*, 39, 246-251.
- (1964): *Causal inferences in nonexperimental research*. Chapel Hill: University of North Carolina Press.
- BOLLEN, K. (1989): *Structural equations with latent variables*. New York: Wiley.

- BRECKLER, S. J. (1990): "Applications of covariance structure modeling in psychology: Cause for concern?". *Psychological Bulletin*, 107, 260-273.
- CHIN, W. W. (1998a): "Issues and Opinion on Structural Equation Modeling". *MIS Quarterly*, 22(1) March: vii-xv.
- (1998b): "The Partial Least Squares Approach to Structural Equation Modeling". En G.A. Marcoulides [ed.]: *Modern Methods for Business Research*, 295-336. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.
  - (1998c): *Structural Equation Modeling in IS Research*. ISWorld Net Virtual Meeting Center at Temple University, November 2-5 1998, Disponible en: <http://interact.cis.temple.edu/~vmc> (click en "guest"):
- DUNCAN, O. D. (1966): "Path analysis: sociological examples". *American Journal of Sociology*, 72, 1-16
- EDWARDS, J. R. y BAGOZZI, R. P. (2000): "On the nature and direction of relationships between constructs and measures". *Psychological Methods*, 5(2), 155-177.
- FALK, R. F. y MILLER, N. B. (1992): *A Primer for Soft Modeling*. Akron, Ohio, The University of Akron.
- FORNELL, C. (1982): "A Second Generation of Multivariate Analysis: An Overview". En C. Fornell [ed.]: *A Second Generation of Multivariate Analysis*, 1: 1-21. New York, Praeger Publishers.
- FORNELL, C. y BOOKSTEIN, F. L. (1982): "A Comparative Analysis of Two Structural Equation Models: LISREL and PLS Applied to Market Data". En C. Fornell [ed.]: *A Second Generation of Multivariate Analysis*, 1: 289-324. New York, Praeger Publishers.
- FORNELL, C. y LARCKER, D. F. (1981): "Evaluating Structural Equation Models with Unobservable Variables and Measurement Error". *Journal of Marketing Research*, 18, February: 39-50.
- GOLDBERGER, A. S. y DUNCAN, O. D. (1973): *Structural equation models in the social sciences*. New York, Seminar Press.
- HAIR, J. F., ANDERSON, R. E., TATHAM, R. L. y BLACK, W. C. (1998): *Multivariate data analysis*. New Jersey, Prentice Hall.
- JOHNSON, R. A. y WICHERN, D. W. (2002): *Applied multivariate statistical analysis*. New Jersey, Prentice Hall.
- JÖRESKOG, K. G. (1973): "A general method for estimating a linear structural equation system". En A. S. Goldberger & O. D. Duncan, (Eds.), *Structural Equation Models in the social sciences*, 85-112: New York, Academic Press.
- (1977): *Structural Equation Models in the Social Sciences: specifications, estimation and testing*. Ed. P.R. Krisnaian
- KEESLING, J. W. (1972): *Maximum likelihood approaches to causal analysis*. Ph.D. dissertation. Department of Education. New York, Wiley.

- KELLOWAY, E. K. (1998): *Using LISREL for structural equation modeling: A researcher's guide*. London, Sage Publications.
- KENNY, D. A. (1979): *Correlation and causality*. New York, Wiley.
- LAND, K. C. (1969): "Principles of path analysis". *Sociological Methodology*, 1, 3-37.
- LOHMÖLLER, J. B. (1984): *LVPLS Program Manual. Version 1.6. Latent Variables Path Analysis with Partial Least-Squares Estimation*. Köln: Zentralarchiv für Empirische Sozialforschung, Universität zu Köln
- MACCALLUM, R. C. y AUSTIN, J. T. (2000): "Applications of structural equation modeling in psychological research". *Annual Review of Psychology*, 51, 201-226.
- MULAIK, S. A. y JAMES, L. R. (1995): "Objectivity and reasoning in science and structural equation modeling". En R. H. Hoyle, (Ed.), *Structural equation modeling: Concepts, issues, and applications*, 118-137: London: Sage Publications.
- NILES, H. E. (1923): "The method of path coefficients: An answer to Wright". *Genetics*, 8, 256-260.
- PORTER, T. M. (1986): *The rise of statistical thinking: 1820-1900*. New Jersey: Princeton University Press.
- SAVA, F. A. (2002): "Causes and effects of teacher conflict inducing attitudes towards pupils: A path analysis model". *Teaching and Teacher Education*, 18, 1007-1021.
- SCHUMACKER, R. E. y LOMAX, R. G. (2004): *A beginner's guide to structural equation modeling*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- SPEARMAN, C. (1904): "General intelligence objectively determined and measured". *American Journal of Psychology*, 15, 201-293.
- TENENHAUS, M.; VINZI, V.; CHATELEIN, Y, y LAURO, C. (2005): "PLS path modeling". *Computational Statistics and Data Analysis* 48: 150 - 205.
- WERTS, C. E. y LINN, R. L. (1970): "Path analysis: Psychological examples". *Psychological Bulletin*, 74, 193-212.
- WILEY, D. E. (1973): "The identification problem for structural equation models with unmeasured variables". En A. S. Goldberger and O.D. Duncan, (Eds.), *Structural equation models in the social sciences*, 69-83: New York: Seminar Press.
- WOLD, H. (1973): "Nonlinear Iterative Partial Least Squares (NIPALS) Modeling: Some Current Developments. En P.R. Krishnaiah [ed.]: *Multivariate Analysis: II, Proceedings of an Interantional Symposium on Multivaraitte Analysis Held at Wright State University, Dayton, Ohio, June 19-24, 1972*, 383-407. New York, Academic Press.
- (1979): *Model Construction and Evaluation when Theoretical Knowledge Is Scarce: An Example of the Use of Partial Least Squares*. Cahiers du Département D'Économétrie. Genève: Faculté des Sciences Économiques et Sociales, Université de Genève.

- (1980): "Soft Modeling: Intermediate Between Traditional Model Building and Data Analysis". *Mathematical Statistics*, 6: 333-346.
- (1982): "Systems under Indirect Observation Using PLS". En C. Fornell [ed.]: *A Second Generation of Multivariate Analysis*, 1: 325-347. New York: Praeger Publishers.
- (1982b): "Soft modeling: The Basic Design and Some Extensions". En *Systems under indirect observation: Causality, structure, prediction. Part II*, 1-54. K.G. Jöreskog & H. Wold (Eds): Amsterdam: North Holland.
- (1985): "Systems Analysis by Partial Least Squares". En P. Nijkamp, H. Leitner y N. Wrigley [ed.]: *Measuring the Unmeasurable*, 221-251. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers.

WOLFLE, L. M. (1999): "Sewall Wright on the method of path coefficients: An annotated bibliography". *Structural Equation Modeling*, 6, 280-291.

- (2003): "The introduction of path analysis to the social sciences, and some emergent themes: An annotated bibliography". *Structural Equation Modeling*, 10, 1- 34.

WRIGHT, S. (1918): "On the nature of size factors". *Genetics*, 3, 367-374.

- (1921): "Correlation and causation". *Journal of Agricultural Research*, 20, 557-585.
- (1923): "The theory of path coefficients: A reply to Niles's criticism". *Genetics*, 8, 239-255.



## CAPÍTULO 20

# Leibniz y el cálculo de los "partis"

MARY SOL DE MORA CHARLES  
Universidad del País Vasco UPV/EHU

*(Con el apoyo de los P.I. HUM2007-60118 - HUM 2007 – 62222/HIST)*

Leibniz pasó una etapa en París de 1672 a 1676, es decir, desde la edad de 26 años hasta los 30. Sabemos que intentó por todos los medios quedarse definitivamente, pero no lo pudo lograr. No obstante aprovechó muy bien esa estancia y dedicó mucho tiempo a ponerse al día de los últimos avances en matemáticas.

En otoño de 1672 Leibniz había entrado en contacto con Huygens, una relación que se revelaría larga y fructífera. Huygens le propuso numerosos problemas matemáticos, como el de hallar la suma infinita de los recíprocos de los números triangulares. Huygens era en aquel momento el matemático y físico más importante de Europa. En este trabajo nos concentraremos en los manuscritos que dedicó a los cálculos de teoría de la probabilidad, en especial los dos problemas básicos: el problema de los dados o número de los casos posibles y el problema de los partis o del reparto de las apuestas.

El primero de estos manuscritos es el que comienza: "*De Numero jactuum in tesseriis proposuit mihi dux Roannetius*" y corresponde al mes de enero de 1676.

La referencia exacta del manuscrito es: LHXXXV, III, math.III B, 14, fol. 1r, 1v, 2r, 2v, cupones 3 y 4.

Ha sido citado y comentado por Kurt-R. Biermann en Forschungen und Fortschritte, 1955, 110-113 y existe una traducción francesa modernizada de M. Parmentier 1995, Vrin, Paris.

En este manuscrito Leibniz estudia el llamado problema de los dados, es decir, el cálculo de los casos posibles al lanzar uno o varios dados. En este texto resuelve perfectamente el problema, tratando de relacionarlo con el triángulo aritmético y además considerando los dados distinguibles entre sí, algo que posteriormente no repetirá. He aquí algunos extractos:

### **De los números en las tiradas de dados, que me propuso el duque de Roannez**

*Todo cuadrado es un número ternario<sup>1</sup> o bien un ternario más la unidad. Demostración:  $y^3 - y$  es ternario, como ya mostré. Por consiguiente si  $y$  no es ternario,  $y^2 - 1$  sería ternario. Por consiguiente  $y^2$  es igual a un número ternario más uno. Si por el contrario  $y$  es un número ternario, está claro que su cuadrado lo será 3nario. Hay que ver si no es un error. Creo que no porque 3 es primo.*

*Todo cuadrato-cuadrado<sup>2</sup> es quinario o bien quinario y una unidad más. Se demuestra del mismo modo, puesto que  $y^5 - y$  es quinario. Construiríamos del mismo modo una infinidad de otros ejemplos. Todo cuadrado impar es ternario o un nombre senario más uno.*

*Disposición del Triángulo Aritmético para las combinaciones: Por ejemplo 2A en 4B se combina 6C veces, es decir que hay 6 com3naciones en 4.<sup>3</sup>*

*Otros teoremas se pueden obtener si escribimos el número dado  $y - 1$  y el número inmediatamente superior  $y$ .<sup>4</sup>*

<sup>1</sup> Ternario: divisible por 3. = 3, 6, 9, 12 etc. N. del Ed.

<sup>2</sup> Elevado a la cuarta potencia. N. del Ed.

<sup>3</sup> En realidad son com-bi-naciones:  $C_4^3 = 6$ . N. del Ed.

<sup>4</sup> Los números 21, 35 y 56 aparecen tachados. N. del Ed.

	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	21
4	1	4	10	20	35	56
5	1	5	15			
6	1	6				
7	1					

	A						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
B4	1	4	C6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	
	1	6	15	20	15	6	1

*U N T P TT TP PP<sup>5</sup>*

*1 dado 6 caras a. b. c. d. e. f.*

*[com2naciones] Caras de dos dados,*

aa	ba	ca	da	ea	fa
ab	bb	cb	db	eb	fb
ac	bc	cc	dc	ec	fc
ad	bd	cd	dd	ed	fd
ae	be	ce	de	ee	fe
af	bf	cf	df	ef	ff

*Hay que añadir al número Triangular o de las com2naciones la suma de las cosas, y tendremos el número de caras de dos dados.<sup>6</sup>*

*Para las [com3naciones] Caras de 3 dados, hay que buscar primero todas las maneras sin repetición, que son el número piramidal de 6. Hay que añadir todas las com2naciones dobles, porque se pueden formar caras de tres dados, con com2naciones de cosas, suponiendo una u otra de las cosas doble.<sup>7</sup>*

<sup>5</sup> U = unidades; N = números naturales; T = números triangulares; P = Piramidales; TT = triángulo-triangulares; TP = triángulo-piramidales; PP = pirámido-piramidales. N. del Ed.

<sup>6</sup> Vemos por qué ha tachado la palabra com3naciones: en el recuento de las caras de 2 dados hay que considerar los dados como distinguibles, es decir considerar las variaciones con repetición  $VR_2^6 = 6^2$ . N. del Ed.

<sup>7</sup> Es decir, repetida. N. del Ed.

Para las caras de 4 dados se tomará el número Triángulo-triangular y se le añadirá una vez las cosas, dos veces las  $com_2$ naciones, tres veces las  $com_3$ naciones; y así sucesivamente.<sup>8</sup>

Pero cuando no contamos solamente las [diversidades] conjeturas, y cuando queremos distinguir los casos no solamente por los números **a, b, c, d, e, f**, sino también por las cosas, es otro asunto, y podremos por ejemplo marcar los (números) de uno de los dados por **A, B, C, D, E, F**, los del otro por **a, b, c, d, e, f**, así tendremos:

<b>Aa</b>	<b>Ba</b>	etc.
<b>Ab</b>	<b>Bb</b>	etc.
<b>Ac</b>	<b>Bc</b>	etc.
<b>Ad</b>	<b>Bd</b>	etc.
<b>Ae</b>	<b>Be</b>	etc.
<b>Af</b>	<b>Bf</b>	etc.

Así los casos o caras según este sentido serán los números de progresión senaria: las caras de dos dados serán 36, de tres dados 216, etc.; igualmente, las caras de (los) pentaedros serán 5, 25, 125, 625, etc. [las diferencias son] el número de caras sin 6. Su diferencia será el número de caras de los dos cubos o hexaedros [que están sin una de las cosas, por ejemplo, sin **f**] donde se halla el número **f**, la diferencia entre los cuadrados de 6 y de 5. Y si hay tres hexaedros la diferencia entre los cubos de 6 y de 5 dará el número de caras sin **f**.<sup>9</sup> Así sucesivamente. Y esas diferencias terminarán siempre por 1 porque los términos se terminan siempre por 6 y 5.

Se trata ahora de saber [cuantos hay] los dobles, es decir las caras en que está **f** más de una vez. Es manifiesto que en dos hexaedros no hay más que un solo caso en que **f** sea doble. Pero en tres hexaedros, veamos cuántas veces **f** es doble; puesto que no puede ser triple más que una vez, veamos para doble. En dos hexaedros es una vez doble, añadámosle el número de caras sin **f** del tercero que es 5, he aquí 5: en dos hexaedros es  $6^2-5^2-1$  veces simple, no se puede tomar esto más que una vez,<sup>10</sup> añadiendo el tercero y combinándolo con una sola **f**. Antes de seguir adelante, será bueno expresar esto con orden.

Observamos que considera como casos posibles las variaciones con repetición, es decir, que distingue los dados como si fueran de distinto color o material. Es lo que llama "cosas".

<sup>8</sup> Es decir, con dos dados,  $36-25=11$  y con tres dados,  $91=216-125$  que son el número de casos sin **f**. N. del Ed.

<sup>9</sup> Quiere decir caras donde haya al menos una **f**, como en el caso de dos dados. N. del Ed.

<sup>10</sup> Es decir,  $10 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 15$ . N. del Ed.

El problema palmario se reduce a: dado un cierto número de dados con el mismo número de lados en el que estén inscritos de la misma manera los mismos caracteres, encontrar por una parte el número de caras sin otra precisión, por otra parte el número de caras en las que aparezca, no aparezca o aparezca un cierto número de veces algún carácter dado. Llamo caras a las diferencias entre las tiradas, debidas sea a los caracteres que aparecen sobre la superficie superior, sea a la diversidad de los dados mismos, diversidad accesible a los sentidos si su tamaño o su color permite diferenciar los caracteres idénticos que aparecen en dados diferentes; consideremos, por ejemplo, un dado cúbico, los caracteres del uno serán **A B C D E F**, los del otro **a b c d e f**, está claro que si se tiran dos dados de este tipo, **Ab** es diferente de **aB**. Para prolongar el mismo ejemplo, sean cuatro dados cúbicos de la misma manera que portan seis caracteres **a b c d e f** de colores diferentes, se trata de buscar cuántas caras o tiradas diferentes hay en las cuales se encuentre uno de los caracteres, por ejemplo 4 veces, o mejor aún, cuántas tiradas de cuatro dados hay en las que aparece el mismo carácter **a** dos veces. Tomemos el número de dados del poliedro, 6, el número de dados, 4, y el número de duplicaciones. Restemos el número de duplicaciones del número de dados,  $4-2 \prod^{11} 2$ . Añadamos una unidad al resto, obtenemos 3: tomemos entonces, comenzando por 3, tantos números consecutivos como unidades hay en el número de duplicaciones, aquí 2, es decir  $3 \cdot 4$ . Dividamos su producto por el del mismo número de términos consecutivos comenzando por uno, es decir,  $1 \cdot 2$ , a saber 2, hay que multiplicar el cociente  $\frac{12}{2} \prod 6$  por el número de lados menos uno, aquí 5, elevado a una potencia igual a la diferencia entre el número de dados y de duplicaciones 2, es decir  $5^2$ , o sea  $6 \cdot 5^2 \prod 150$ .

### Encontrar el número de caras

Es decir encontrar el número de tiradas diferentes en las cuales la configuración propuesta se repite un número dado de veces. La diversidad de las tiradas depende por una parte de los puntos mismos, por ejemplo, al lanzar dos dados, se obtiene IV y 5 y luego IV y 3, por otra parte depende de los dados que intervienen en la tirada, por ejemplo la tirada IV y 5 difiere de la tirada V y 4, si se admite que en un dado los caracteres están en mayúsculas y en el otro en minúsculas. Esto se mostrará diferenciando los distintos dados por colores u otras marcas distintivas.

Pero no sólo hay que tener en cuenta el resultado de la tirada sino de los dados con los que se realiza, en la medida en que nuestro problema debe servir para resolver otro concebido en estos términos: dos personas convienen que todas las veces que el uno haya sacado un 5 al lanzar los dados reciba una cierta suma, y a la inversa todas las veces en que no aparece el 5, reembolse una cierta suma; se busca cuál debe ser la proporción entre lo que debe ganar y lo que debe pagar para que la igualdad sea preservada.

<sup>11</sup> Este signo quiere decir igual o equivalente a. N. del Ed.

*Solución*

Del número de Datos  $T \equiv 4$  (6), se resta el número de Repeticiones  $\equiv 2$  (4), queda  $T - R \equiv 4 - 2 \equiv 2$  (o  $6 - 4 \equiv 2$ ). Añadiendo a ese resto una unidad se obtendrá  $T - R + 1 \equiv 3$  (o 3). Escribamos números crecientes de uno en uno, comenzando por  $T - R + 1$  (es decir 3), luego  $T - R + 1$ ,  $T - R + 2$ ,  $T - R + 3$ , etc. en número igual al número de repeticiones  $R$ , es decir 2 (4), a saber  $3 \cdot 4$  (o  $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ ). Dividamos el producto obtenido al multiplicar esos números continuamente crecientes 12 (360), por el producto del mismo número de factores tomados sucesivamente de uno en uno a partir de 1, 1 vez 2  $\equiv 2$  (1 vez 2 veces 3 veces 4  $\equiv 24$ ), se obtendrá  $\frac{12}{2} \equiv 6$  ( $\frac{360}{24} \equiv 15$ ). Multipliquemos ese cociente por el número de caras de los dados menos uno, aquí 5, multiplicado a su vez por sí mismo un número de veces igual al número de unidades contenidas en la diferencia  $T - R$  entre el número de Datos y el de Repeticiones 2 (2), o sea  $5^2$  ( $5^2 \equiv 25$  (25)), se obtendrá  $6^2 \cdot 25 = 150$  ( $15^2 \cdot 25 = 375$ ). Dado el número de Datos (6) y de Repeticiones (4), encontrar el número de dobles (375) según la repetición dada (4). Del número de los dados quitad el número de repeticiones, añadid la unidad a lo que queda (2), y haced que el resultado sea el menor de tantos números crecientes por la unidad como unidades hay en el número de los  $R$ . Multiplicad todos esos números el uno por el otro en sucesión ( $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ) y dividid el producto por otros tantos números crecientes (y comenzando por 1) lo que siempre se puede hacer sin obtener resto. Multiplicad el cociente por la potencia de 5 cuyo exponente es (2) la diferencia entre el número de los dados y de las repeticiones (2). Y el producto (375) satisfará lo exigido.<sup>12</sup>

En octubre de 1678 redacta Leibniz el manuscrito: "*Du jeu du Quinquenove...*"<sup>13</sup> Aparece aquí sorprendentemente el error en el problema de los dados. Parece que Leibniz no había acabado de entender esta cuestión y ya nunca la entenderá, aunque algunas veces no lo necesitará, porque el enfoque o la naturaleza del problema que estudia no pasan por ahí. El problema de los dados resulta ser para Leibniz como el secreto de Polichinela. Podemos ver el contraste entre los dos manuscritos, el de la izquierda correcto, el de la derecha erróneo:

<sup>12</sup> Y el método funciona, como se puede comprobar. N. del Ed.

<sup>13</sup> Véase Mora Charles (1992).

Manuscrito de Leibniz: enero 1676, "De numero jactuum in tesseris..."

*1 dez, 6 faces: a,b,c,d,e,f*

*Pour com2naisons de deux dez, 36 faces; il faut ajouter au nombre Triangulaire ou des com2naisons la somme des choses, et nous aurons le nombre des faces des deux dez.*

*Pour les faces de 3 dez, il faut chercher premierement toutes les varietez sans repetition, qui sont le nombre pyramidal de 6. Il faut ajouter toutes les com2naisons doublées, parce qu'on peut faire des faces de trois dez, des com2naisons de choses, en supposant ou l'une ou l'autre des choses double.*

*... Mais lors que nous voulons distinguer les cas non seulement par les nombres a b c d e f mais encor par les choses, c'est autre chose, et nous pouvons par exemple marquer ceux d'un des dés par A B C D E F, ceux de l'autre par a b c d e f. Ainsi nous aurons*

*Aa Ba .... Fa*

*Ab Bb .... Fb*

*.....*

*Af Bf .... Ff*

*ainsi les cas ou faces des deux seront les nombres de la progression senaire. Les faces des deux dés seront 36, de 3 dez 216, et de meme..."*

Manuscrito de Leibniz: octubre 1678, "Du jeu du Quinquenove..."

*Je suppose qu'on joue à deux dés, et que ces deux dés sont bien faits, sans qu'il y a de la tricherie, cela estant il est visible qu'il n'y a que deux manieres de rencontrer cinq points, l'une est 1 et 4, l'autre 2 et 3, au lieu qu'il y a trois manieres pour avoir huit points, sçavoir 2 et 6, item 3 et 5, et enfin 4 et 4. Or chacune de ces manieres a en elle même autant d'apparence que l'autre car par exemple il n'y a point de raison pour la quelle on puisse dire qu'il y a plus d'apparence de rencontrer 1 et 4 que 3 et 5. Par consequent il y a autant d'apparences (égales entre elles) qu'il y a de manieres. Donc cinq points se pouvant faire seulement de deux manieres, mais huit points se pouvant faire de trois façons, il est manifeste qu'il y a deux apparences pour cinq et trois apparences toutes semblables, pour huit. Or l'apparence entiere n'est que la somme de toutes ces apparences particulieres, car puisque elles sont égales il suffit de les conter, et il ne sert de rien de les peser.*

Este manuscrito "*Du jeu du Quinquenove*", con la referencia: *LH XXXV, A, 8, f. 14-19*, incluye también interesantes reflexiones acerca de conceptos como apariencia, ventaja o desventaja e intenta hallar la proporción en que deben hacerse las apuestas en un juego en que los dos jugadores no tienen la misma ventaja. Pero calcula las posibilidades como si los dados fueran indistinguibles.

*Del juego del quinquenove primera parte octubre 1678<sup>14</sup>.*

<sup>14</sup> Folio 14. N. del ed.

## Juego de (Kinkenove, Cinquenove) Quinquenove

*Pero para hacer esta materia más inteligible [es necesario] digo en primer lugar que la apariencia se puede estimar, e incluso se puede vender o comprar. Por ejemplo, un hombre tiene el derecho o el compromiso de jugar: el juego es de azar y no de habilidad, y depende de ciertas reglas; yo me quiero poner en su lugar y acabar el juego que él ha comenzado; la cuestión es por cuánto debo comprar la ventaja que él ya ha conseguido [suponiendo que la haya, pues si hubiera desventaja, estaría más bien obligado a dar alguna cosa al que quisiera [correr el riesgo] liberarle]; para no pecar contra las leyes de la prudencia, suponiendo que para mi diversión o por otras razones yo no quiero o no puedo evitarlo. Se ve entonces que la ventaja se puede vender y por consiguiente estimar, aunque el suceso sea todavía incierto. Tomemos un ejemplo. Dos personas juegan a los dados: uno ganará si todavía consigue [seis] ocho puntos, el otro si consigue [diez] cinco. Se trata de saber por cuál de los dos habría que apostar. Yo digo que habría que apostar más bien por el que necesita ocho puntos, e incluso que su ventaja comparada con la esperanza que el otro debe tener es como de tres a dos. Es decir, que yo podría apostar tres escudos contra dos por el que requiere [seis] ocho puntos contra el otro, sin perjudicarme. Y si apuesto uno contra uno, tengo una gran ventaja. Es verdad que no obstante la apariencia [contraria] puedo perder; aunque la apariencia de perder es como dos y la de ganar como tres. Pero a la larga, observando esas reglas de la apariencia, y jugando o apostando con frecuencia, es constante que al final encontraré que habré ganado más que perdido.*

*Pero para hacer ver que hay más apariencia para el que necesita [ganar] ocho puntos, he aquí la demostración. Supongo que se juega con dos dados, y que esos dos dados están bien hechos, sin que en ellos haya trampas [superchería], siendo así es evidente que no hay más que dos maneras de conseguir cinco puntos, la una es 1 y 4, la otra 2 y 3. En cambio hay tres maneras de obtener ocho puntos, a saber 2 y 6, también 3 y 5 y en fin 4 y 4. Ahora bien, cada una de esas maneras tiene en ella misma tanta apariencia como las otras pues por ejemplo no hay razón para que se pueda decir que hay más apariencia de obtener 1 y 4 que [de obtener] 3 y 5. Por consiguiente, hay tantas apariencias (iguales entre sí) que maneras de obtenerlo<sup>15</sup>. Luego como [seis] cinco puntos se pueden hacer solamente de dos maneras, pero ocho de tres maneras, es manifiesto que hay dos apariencias para [el uno] cinco y tres apariencias todas semejantes, para [el otro] ocho. Ahora bien [para tener] la apariencia entera [no hacen más que contar] no es más que la suma de todas esas apariencias particulares, pues como son iguales basta con contarlas y no sirve de nada pensarlas. Y suponiendo que cada apariencia valiera un escudo o alguna otra cosa, habría el valor de 2 escudos de apariencia para*

<sup>15</sup> De hecho, el (4, 4) tiene una sola manera y los otros dos casos, dos maneras cada uno. Esto modifica el razonamiento de todo lo que sigue. N. del Ed.

*cinco puntos, y el valor de 3 escudos de apariencia para los ocho puntos. Luego la apariencia del uno al otro es como de dos a tres.*

En cuanto al problema del reparto de las apuestas cuando un juego de azar se interrumpe antes del término pactado de antemano, encontramos otros dos textos de Leibniz. Pero este caso no llegará a ser resuelto por él, pues no tuvo acceso a la correspondencia entre Pascal y Fermat, y contaba solo con algunos resúmenes o referencias de Huygens, no obstante, es interesante para nosotros porque nos muestra el modo de trabajar de Leibniz y su tendencia a buscar en todo caso un método matemático general y abordando el problema desde todos los ángulos que se le ocurren.

El título original de este manuscrito es: "*Le Chevalier de Méslé fut...*" redactado por Leibniz el 7 de enero de 1676. La referencia del manuscrito es la siguiente: LHXXXV, III, math.III B, 14, fol. 5r, v, 6r, v, 7r, v, 8r, v. Este texto fue analizado brevemente en 1955 por Kurt-R. Biermann en *Forschungen und Fortschritte*, 1955, 110-113. Pero ha permanecido inédito hasta 1995, cuando Marc Parmentier publicó una versión en francés con algunas variaciones y modernización en el lenguaje (*L'estime des apparences*. VRIN, Paris). Presentamos extractos de la transcripción del manuscrito que acabamos de realizar, y cuya traducción aparecerá en la edición de escritos matemáticos de Leibniz que prepara el proyecto Leibniz en español.

Sur le Calcul des Partis

7 janvier 1676

*Le Chevalier de Méslé fut le premier qui donna l'ouverture pour le calcul des partis, que les Messieurs Pascal et Huguens ont entrepris par apres. On croyoit que s'il y avoit par exemple trois partis à gagner pour gagner l'argent qui estoit mis ou trois partis à gagner pour gagner le jeu, et si l'un avoit gagné deux partis; et l'autre un que  $\frac{2}{3}$  du jeu appartenoit au gagueur. Mais il refutoit cela, par ce qu'il ne me faut qu'un parti pour gagner le tout, et il ne me faut que la perte d'un pour rendre tout egal, et pour revenir au premier estat, donc  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{2}{4}$  m'appartenant au commencement, et en cas de perte du 4<sup>me</sup> jeu; et le tout, ou  $\frac{4}{4}$  m'appartenant: en cas du gain du 4<sup>me</sup> jeu, ou du 3<sup>me</sup> parti; il est donc manifeste qu'avant que de le gagueur ou perdre j'ay  $\frac{1}{4}$  de l'argent mis sur la table, car ce jeu me peut faire gagueur  $\frac{2}{4}$ , et me peut faire perdre  $\frac{2}{4}$ , donc il vaut  $\frac{1}{4}$  ou la moitié de  $\frac{2}{4}$ . Donc avant ce jeu j'avois  $\frac{3}{4}$ .*

Vemos que Leibniz propone los valores correctos para la proporción de las ganancias en el caso de que un jugador haya ganado 2 partidas y el otro 1, de las 3 que estaban pactadas antes de interrumpir el juego. Además muestra mucho interés por el caballero de Méré, supuesto introductor del problema en el círculo de Pascal:

*Le Chevalier de Melé, gentilhomme du Poictou grand joueur et homme d'esprit. Cela a lieu au piquet<sup>16</sup> ou l'on joue des partis liez et qu'il faut gagner 3 fois par exemple ou 4 fois pour amener l'argent.*

En lo que sigue, se preocupa más por el reparto de la cantidad en juego que por su proporción, o por la probabilidad de los distintos lances, como ya habían hecho Pascal y Fermat. Pero tiende a considerar sólo la diferencia entre el número de partidas ganadas y no es hasta más tarde que dice: "no es la misma cosa que yo haya ganado 3 partidas y el otro 1, o que yo haya ganado 2 partidas y el otro ninguna".

*Donc l'argent mis au jeu estant  $a$  et le nombre des partis qu'il faut gagner pour amener tout l'argent estant  $p$ , 1 parti vaudra  $\frac{a}{2p}$  et 2 partis gagez vaudront:  $\frac{a}{p}$ . Lesquels joints à  $\frac{a}{2}$  j'aurois alors  $\frac{a}{2} + \frac{a}{p}$  de tout l'argent. Mais mon adversaire gagne le 3<sup>me</sup> parti, c'est à dire il gagne par la:  $\frac{a}{2p}$ , et il a ainsi  $\frac{a}{2} + \frac{a}{2p}$ . Donc mon droit sur l'argent tout entier est au sien comme  $\frac{a}{2+p}$  est à  $\frac{a}{2} + \frac{a}{2p}$  ou comme  $\frac{ap+2a}{2p}$  est à  $2p$  ou comme  $p+2$  est à  $p+1$ . Par consequent il faut diviser  $a$  en deux parties dont l'une soit à l'autre comme  $p+2$  est à  $p+1$ , et  $p$  estant  $\Pi$  3. il faut  $a$  diviser en deux parties dont l'une soit à l'autre comme 5 à 4 c'est à dire divisant toute la somme en 9 parties. Celuy qui a gagné 2 partis aura  $\frac{5a}{9}$ , et celuy qui n'a gagné qu'un aura  $\frac{4a}{9}$ . Mais nous verrons maintenant si le calcul est juste car si celuy qui a gagné 2 partis, gagne encor, c'est à dire  $\frac{a}{2p}$ , c'est à dire  $\frac{a}{6}$ ,  $p$  estant  $\Pi$  3, il aura  $a$  tout entier mais  $\frac{5a}{9} + \frac{a}{6}$  ne fait pas  $a$ . De mesme s'il perdoit un, il n'auroit que  $\frac{4a}{9}$  or  $\frac{4a}{9} - \frac{a}{6}$  ne fait pas  $\frac{a}{2}$ . C'est pourquoy il y a du sophisme dans nostre calcul.*

No se desanima y lo vuelve a intentar. Esta vez aparece el concepto de apariencia de ganar o de perder.

*Cependant je croys que nous avons la regle. Le nombre des partis necessaires est  $p$ , le nombre des partis gagez  $g$ . Donc de ceux qui restent à gagner le nombre est  $p-g$ . Donc si vous perdez  $g$ , vous revenez à l'egalité, si vous gagez  $p-g$ , vous amenez l'argent. Or l'apparence de gagner est à l'apparence de perdre en raison reciproque du nombre des jeux qu'il faut gagner, au nombre des jeux qu'il faut perdre, ou comme  $g$  à  $p-g$ ; et par consequent le gain sur la moitié de l'apparence d'amener l'argent, est à l'apparence de revenir à l'egalité comme  $g$  à  $p-g$ . Mais*

<sup>16</sup> Juego de cartas, llamado también de los cientos. Las reglas son muy complicadas. Se juega con baraja francesa de 32 cartas entre dos jugadores y se pacta la duración de la partida. Las partidas pueden ser secas o ligadas, en cuyo caso ganará el que se anote dos mangas. N. del Ed.

comme est l'apparence d'amener l'argent, à l'apparence de revenir à l'égalité de mesme est le droit acquis sur l'argent de mon la partie de l'argent de mon adversaire sur la quelle un droit m'est acquis, à la partie de son argent qui reste dans la communauté. Donc si le jeu se doit separer en cet estat, j'aurois preferablement de l'argent de mon adversaire une partie qui sera à l'autre partie comme  $g$  est à  $p-g$ . Le reste sera divisé également. Et par consequent l'argent est  $a$ ,

la moitié de mon adversaire est  $\frac{a}{2} \Pi \frac{pa}{2p} \Pi \frac{ga | pa | ga}{2p}$ , ainsi j'auroy en cas de separation;  $\frac{a}{2} + \frac{pa-ga}{4p} + \frac{ga}{2p} \Pi \frac{3ap+ga}{4p}$ .

Ahora intenta otra variante, cuando los dos jugadores no apuestan la misma cantidad, pero este cambio no le ayudará. Más adelante propone pagar por cada jugada al que la gane, sin darse cuenta de que el valor de las jugadas depende de las anteriores y las posteriores y que el que gana al final se lo ha de llevar todo.

*De plus la difficulté s'augmentera ainsi, posons que les obligations des joueurs soyent inegales; c'est à dire que l'un s'oblige à perdre plus qu'il ne sçauroit gagner. Il est manifeste alors en cas d'égalité; il n'y a point d'obligation mais en cas de gain je gagne la somme que mon adversaire a mis quoyque plus grande que la mienne. Donc si j'ay gagné quelques points et mon adversaire aussi, il faut calculer tout de meme que la somme que mon adversaire a mis. Je ne voy pourtant pas encor la chose assez clairement, par ce que si je le voyois dans la derniere simplicité, je devois estimer combien un point gagné m'avance en notre cas, et combien un point perdu avance mon adversaire. Il faut voir si on peut expliquer la chose ainsi. Je gagne un certain nombre de points et en raison de ces points j'ay un droit acquis de l'argent de mon adversaire; je conte si mon adversaire n'avoit rien gagné; car ce qu'il aura gagné sera conté apart sur mon argent; et nous pouvons faire comme si à chaque coup nous payions autant que chacun a de droit acquis sur son adversaire et nous verrons au bout du conte, lequel auroit gagné. Je gagne donc  $g$  points, ils me restent à gagner  $p-g$  points, l'apparence de les gagner est en raison reciproque des points à gagner. Car la difficulté croist avec le nombre, donc la facilité décroist avec le nombre. Car il faut pourtant demonstrier cecy rigoureusement.*

Ahora comprende que las apariencias no son recíprocas de los puntos que faltan de ganar, e introduce el concepto de "desapariencias". Pero sigue con la idea de pagar cada jugada.

*Il ne faut donc pas dire que les apparences sont en raison reciproque des points, qui restent à gagner pour amener l'argent, car si cela estoit, l'apparence de gagner, et par consequent le droit acquis sur l'argent de mon adversaire lors que j'ay tous les points qu'il faut, seroit à l'apparence de gagner, lorsque j'ay tous les points hors mis 3, comme 3 à 0. Et par consequent celuy qui a tous les points prenant tout ce que son adversaire a mis au jeu, celuy qui auroit tous les points hors mis 3, n'obtiendra rien. Donc il faut dire que pas faire les apparences en*

*raisons reciproques des points à faire. Mais plutost les des-apparences ou les difficultés, en raisons directes des points qui restent à faire.*

*Et les des-apparences sont proportionelles à ce qui reste de droit à mon adversaire, sur son argent. Et les points qu'il a à faire font la des-apparence qu'il y a qu'il conserve son argent et par consequent elles sont proportionelles au droit qu'il a perdu. Donc: ayant gagné ( $g$ ) points, et ayant à gagner  $p-g$  points, il ne faut que dire que l'argent de mon adversaire doit estre partagé en 2 parties dont l'une est à l'autre comme  $g$  à  $p-g$  et la partie comme  $g$  m'appartiendra. Jusques icy j'ay supposé que mon adversaire n'ait rien gagné. Ainsi supposons que j'aye ganez 3 points et que j'en doiuve gagner  $5p$  pour amener tout, mais que nous convenons, de nous payer à chaque coup à proportion du party.*

Para simplificar el problema propone que uno de los jugadores no apueste nada, como si al oponente le bastara con "el placer de jugar contra él". Pero vuelve a fallar.

*Voila la veritable methode, à ce que je crois. Le nombre des points qu'il faut gagner est  $p$ . L'argent que mon adversaire a mis au jeu est  $a$ . Supposons que je ne mette rien de mon costé car cela peut arriver; et mon adversaire peut conter le plaisir qu'il a de jouer contre moi, pour quelque chose. Quoiqu'il y ait de la difficulté, car c'est alors plutost un prix proposé s'il faut que je gagne dans un temps prefix et s'il n'y a point de temps, c'est un salaire, car humainement parlant je ne manqueray jamais de gagner que si nous metons de deux costez, on peut concevoir l'un comme salaire de l'autre; et le salaire cessera lors que l'un de deux aura fait un certain nombre: mais cela n'est pas dans nostre cas; donc cette supposition ne servira de rien.*

Vuelve pues al caso anterior: ambos apuestan la misma cantidad, pero ahora los juegos que se ganen han de ser consecutivos, porque el ejemplo de juego que utiliza es el llamado Triunfo, probablemente porque es un juego sencillo y que él conocía bien:

*Donc la question se peut concevoir ainsi: deux joueurs mettent chacun une somme egale au jeu, à condition que celui qui gagne un certain nombre de coups consecutifs, par exemple 4, gagnera tout. Par exemple, jouant triomphe<sup>17</sup>, ils demeurent d'accord apart que celui qui pendant le jeu principal gagnera le premier quatre fois consecutives, tirera outre ce qu'il gagne au jeu principal une certaine somme qu'ils ont mise pour cet effect. Il s'agit de sçavoir le(s) partis qu'il faut faire de cette somme, lorsque (le) jeu cesse, selon le nombre des points que celui qui a gagné le dernier, a gagné. Cette condition a cela de remarquable qu'on ne les sauroit finir  ~~dans les jeux ou on ne peut passer~~ que l'un de deux n'emporte*

<sup>17</sup> **Triomphe**: juego de cartas que más tarde derivará en el **écarté** (en español, el Burro). Es rápido, de reglas sencillas, se jugaba entre dos o más jugadores y admite apuestas de los espectadores. Se decide al azar un palo de triunfo. N. del Ed.

*quelque chose de la somme. Car celuy qui a gagné le dernier a détruit tout ce que l'autre a fait. Et ainsi n'ayant qu'un point pour le moins lors que le jeu cesse, il luy appartiendra à proportion*

Se le ocurre ahora la complicación que causó problemas a Pascal y que Fermat resolvió con soltura: qué pasa si hay más de dos jugadores. Comprobamos aquí una vez más que no conoció la correspondencia entre ambos:

*On peut considerer la mesme chose lors qu'il y a plus de joueurs que deux, ce que Mons. Pascal n'a pas examiné, et qui est bien plus embarrassé. Car s'il y en a trois par exemple; il ne faut pas prendre le double du nombre des jeux à gagner, pour le nombre des jeux à jouer, mais le triple, alors il faut faire le partage sur trois parties proportionnelles aux apparences, et pour estimer les apparences il faut avoir egard ayant à deux obstacles, par exemple non seulement venant de **c**, mais aussi de **d**, troisieme joueur. On peut considerer que deux jouent, et qu'on demande d'un certain nombre de partis à l'autre, un autre; pour gagner il peut estre que l'un aye mis plus au jeu, dont il a quitté la propriété, pour acheter par le droit de gagner en moins de coups.*

*S'il y a trois jeux à gagner, et **b** en a gagné 2, **c** en a gagné 1 s'il gagne 1, il a tout, s'il perd un, il a la moitié de ce qui est au jeu, donc le gain d'un coup luy donnant **a** et la perte d'un coup luy la remettant à  $\frac{a}{2}$ , il semble que l'apparence le jeu luy doit donner autant qu'il luy peut oster. Mais si ce calcul n'a point d'autre principe, il est mal fondé; parce qu'il s'agit non seulement du nombre des points mais encor de la primauté. Et par même raison on prouveroit qu'il est la même chose que deux joueurs gagnent tous deux, ou perdent tous deux en cas de jeu contesté; ce qui n'est pas icy.*

Limitándose ahora de nuevo a dos jugadores, que evidentemente es un caso más simple, sigue sin comprender que lo adquirido sólo tiene sentido si se interrumpe el juego, es decir, que lo adquirido por una partida ganada es sólo provisional y puede ser recuperado por el adversario si el juego continúa. Se plantea ahora el interesante problema de un juego que continúe indefinidamente, y encuentra la idea pero no la serie concreta:

*Pour examiner cela voyons si le meme proviendroit en supposant qu'un homme **b** gagne trois coups de suite, et qu'on luy paye chaque fois ce qu'il peut avoir gagné de droit par ce coup. Le premier coup luy donne  $\frac{16a}{23}$  et à son adversaire  $\frac{8}{23}$  dont prenant  $\frac{7a}{23}$  preferablement, et laissant  $\frac{8}{23}$  au jeu, aussi bien que son adversaire, il restera au jeu  $\frac{16a}{23}$  dont gagne le second coup. Et c'est comme si l'on avoit proposé à gagner  $\frac{16a}{23}$  à deux en sorte que l'un fut obligé à jouer gagner 7 jeux, l'autre à gagner trois pour l'emporter. Mais je voy à present que ce seroit injuste, comme cela, car ayant payé à celuy qui a gagné l'avantage qu'il a eu sur l'autre, il ne faut*

pas luy laisser encore de l'avantage, c'est pourquoy il faut que l'un gagne autant de fois que l'autre. Et on peut dire que celui qui a gagné renonce à son coup, en receuuant ce que je viens de dire. Et il s'agit de sçavoir si cela Et puisqu'ils sont rendus egaux, il s'agit de sçavoir s'il faut faire en sorte que tous deux soyent obligez de gagner le residu en trois coups; ou tous deux en deux coups. Je dis que cela n'importe. Et selon la justice puisqu'ils sont egaux c'est à eux de choisir la maniere qui leur plait. Donc si encor tous deux s'obligeoient à gagner trois coups, et si on payoit toujours son coup, à celui qui gagneroit, continuant cecy à l'infini; la somme de toutes ses fractions doit estre egale à la somme proposée toute entiere. Si tous deux s'obligeoient à gagner seulement deux coups, et **b** gagne le premier, il ne luy reste qu'un coup, et deux à son adversaire, donc les manieres et les coups estant doubles; l'avantage est quadruple, et par ce second coup, **b** aura sur  $\frac{16a}{23}$  qui restent au jeu, que nous appellerons **(a)**  $\frac{4(a)}{5}$ , et **c**  $\frac{1(a)}{5}$  donc **b** prendra plus preferablement  $\frac{3(a)}{5}$  et il restera au jeu  $\frac{2(a)}{5} \cap \frac{32a}{5 \cdot 23}$ , lequel appartient à tous deux egalement. Si on les obligeoit de jouer toujours à trois coups, et de vendre toujours le coup; **b** gagnant toujours il auroit premierement  $\frac{16a}{23}$  et  $\frac{18(a)}{23}$ . Sed si **(a)**  $\frac{16a}{23}$  et  $\frac{16((a))}{23}$ , si **((a))**  $\frac{16(a)}{23}$  sive **((a))**  $\frac{16 \cdot 16a}{23 \cdot 23}$ , et ainsi **b** auroit eu  $\frac{16a}{23} + \frac{16}{23} \cap \frac{16 \cdot 16a}{23 \cdot 23}$ , et ainsi en progression geometrique perpetuelle à l'infini. Donc **b** gagnant tousjours la difference de son gain et du tout deviendroit moindre qu'aucune grandeur assignable, c'est à dire, il gagneroit tout dans toute l'eternité un temps infini, or la somme de  $1 + \frac{a}{23} + \frac{a^2}{23^2}$  etc. est geometrica seriei  $\frac{1}{1-y} \cap 1 + y + y^2 + y^3$  etc. Ergo  $1 + \frac{16^1}{23^1} + \frac{16^2}{23^2} + \dots \cap \frac{1}{1-\frac{16}{23}} \cap \frac{23}{7} a \cap \frac{23}{7} \cap \frac{16a}{23} \cap \frac{16a}{7} \cap 2a + \frac{a}{7}$

Donc **b** gagneroit plus qu'il n'y a à gagner, ce qui est absurd, donc le principe l'est aussi ou il faut qu'il y aye une erreur dans le calcul.

Estos ensayos se interrumpen sin llegar a una buena conclusión. Más tarde escribiré otro manuscrito en el que además de volver a intentarlo, introduce algunas ideas interesantes. Se trata de "De incerti aestimatione" con fecha de Septiembre 1678. Este texto de Leibniz está redactado como un escrito definitivo, estructurado en torno a axiomas y definiciones, sin perjuicio de que luego Leibniz no llegara a completarlo. En él se retoman investigaciones previas sobre juegos de azar, y en particular sobre el cálculo de los partis. Se repiten algunas de las observaciones que aparecen en el texto de 1676. Es interesante la conexión que hay entre las reflexiones sobre los juegos de azar y las cuestiones jurídicas que Leibniz tiene presentes en estas indagaciones matemáticas.

## Estimación de la incertidumbre

*Septiembre de 1678.*

*Un juego es justo si la razón entre la esperanza y el miedo es la misma en cada jugador. En un juego justo cada jugador tiene tanta esperanza como bazas haya comprado<sup>18</sup>, pues lo justo es tener tantas bazas como compras se hayan hecho, y el miedo a perder es tanto como el precio de la esperanza.*

*Axioma*

*Si los jugadores actúan de manera similar a los demás, de modo que no cabe ver diferencia alguna entre ellos, salvo la que consiste en el resultado de la tirada, la razón entre la esperanza y el miedo es la misma.*

*Este axioma puede ser demostrado metafísicamente<sup>19</sup>. En efecto, allí donde las apariencias son la misma, podemos formarnos juicios iguales sobre ellas, y por tanto la razón para opinar sobre el evento futuro es la misma; mas esta opinión sobre el evento futuro, o bien es la esperanza, o bien es el miedo.*

*Si la suerte que está en juego se ha formado contribuyendo por igual cada jugador y cada cual juega del mismo modo, y si a un mismo resultado le corresponde un mismo premio o un mismo castigo, el juego es justo.*

Habla ahora de esperanza de ganar y al final del texto aparece la idea de progresión aritmética, una nueva notación, claramente combinatoria que va hasta el infinito. El manuscrito no está terminado.

*Si dos juegan con la condición siguiente: gana la partida quien haya ganado el juego tres veces, y yo he ganado dos juegos, se pregunta: ¿cuál es mi esperanza de ganar la partida? Es decir, ¿cuánta es mi esperanza? Es claro que si mi adversario gana un segundo juego, estaremos iguales. Observemos que, en general, la partida debe terminarse tras seis juegos válidos, y llamo juegos válidos a aquellos en los que ha vencido uno de los dos. Supongamos ahora que esa es una regla de la partida, que uno u otro gane o pierda cada juego.<sup>20</sup> Al principio, antes de que alguno venza, estamos iguales. Luego gano un juego, es claro que el otro ha de ganar otro juego para que volvamos a empatar. Mas sólo dispone ya de cinco juegos, y por tanto su riesgo es mucho mayor que si dispusiera de más juegos. Gana él el siguiente, y la partida vuelve a estar en situación de igualdad, con lo cual sucede como si la partida estuviera en la misma situación como si volviéramos a empezar desde el principio, habiendo establecido que la ganará quien primero gane dos juegos. Esto es así si se hace la cuenta considerando cada*

<sup>18</sup> Se supone que las bazas que se van a jugar y se pretenden ganar, han sido previamente compradas en subasta entre los jugadores.

<sup>19</sup> Aquí esboza una demostración en base al principio de razón suficiente.

<sup>20</sup> Regla equivalente al axioma lógico de *tertio excluso*. N. del Ed.

*juego por igual, pues sería muy distinto si hubiera que ganar tres juegos seguidos, sin que hubiera interrupción por alguna victoria ajena.*

*Más aquí no es éste el caso, y aceptamos que todo ha vuelto a la situación de igualdad. Así pues, en el segundo juego, o bien se vuelve a la situación de empate, o bien mi adversario quedaría en una situación de dos juegos de desventaja. Supongamos que yo haya ganado también el segundo juego, con lo cual la partida llega a la situación de que, o yo la gano, o volvemos a la situación anterior<sup>21</sup>.*

Más tarde, Leibniz se interesará por las reglas de algunos juegos pero ya no tratará más los dos problemas aquí mostrados, porque otros aspectos de las matemáticas y otros muchos y diversos temas reclamaban su atención.

## Bibliografía

BIERMANN, K-R. (1954): "Über die Untersuchung einer speziellen Frage der Kombinatorik durch G.W.Leibniz". *Forschungen und Fortschritte*, 28, 357-59.

- (1955): "Über eine Studie von G.W.Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung". *Forschungen und Fortschritte*, 29, 110-113.

- (1956): "Spezielle Untersuchungen zur Kombinatorik durch G.W.Leibniz". *Fors. u. Fort.*, 30, 169-172

- (1957): "Eine Aufgabe aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung". *Centaurus*, 5, 142-150.

HUYGENS, CH. (1657): "De ratiociniis in ludo alea, en Oeuvres Complètes". Nijhoff, La Haya, vol XIV, 1-179, 1888-1950. Société Hollandaise des Sciences,

MORA CHARLES, M. S. DE. (1985): "Algunos manuscritos inéditos de Leibniz sobre juegos". *Elementos*, 7, 21-30.

- (1986): "Leibniz et le problème des partis. Quelques papiers inédits". *Historia Mathematica*, 13, 352-369.

- (1989): "Premières applications des Mathématiques à la décision de quelques problèmes religieux et éthiques". En *Science and Religion*, A.Bäumer & M. Büttner (eds.), Bochum, 1989.

- (1991): "La Bassette et l'Homme, deux jeux de cartes étudiés par Leibniz dans de manuscrits inédits". *Studia Leibniziana*, 1991, XXIII/2, 207-220.

- (1992): "Quelques jeux de hazard selon Leibniz (manuscrits inédits)". *Historia Mathematica*, 19, 1992, 125-157.

PARMENTIER, M. (1995): *L'estime des apparences*. París, VRIN.

<sup>21</sup> Como señalaba en "Leibniz y los dos problemas de Méré", *Llull*, 16, 1993, Leibniz se equivoca. El sigue el mismo procedimiento que Pascal y Huygens, pero aquí da por supuesto que la situación 1/0 es equivalente a la de 2/1. N. del Ed.

PASCAL, B. (1954): "Traité du Triangle Arithmétique, 1654". En *Oeuvres complètes*, ed. Jacques Chevalier, Gallimard, Paris. También en *Oeuvres*, vol. III. L. Brunschwig & P. Boutroux (eds.), 1980, 433-598. Paris, Hachette.

- (1654-60): "La correspondance Pascal-Fermat". En *Oeuvre*, éd. J. Mesnard, Paris, Desclée de Brouwer, 1964-, 2 vol. También en *Les Cahiers de Fontenay*, 32, septembre 1983.
- (1894): "La correspondance Pascal-Fermat" En *Oeuvres de Pierre de Fermat*, P. Tannery & Ch. Henry (eds.), Vol.II, 288-314. Paris.

---

Manuscritos sobre cálculo de probabilidades:

- \* enero 1676. "De numero jactuum in tesseris", comentado por Biermann (1954)
- \* 7 de enero de 1676. "Sur le Calcul des Partis. Le Chevalier de Méré fut le premier...", comentado por Biermann (1955)
- \* septiembre de 1678. "De incerti aestimatione", editado y comentado por Biermann (1957)\*  
1686. "J'ay vu dernièrement dans le Journal des Scavans..." ed. M.S. de Mora (1986).

Manuscritos sobre algunos juegos en particular:

- \* 1679(?). "Du jeu de la Bassette", ed. M.S. de Mora, 1991
- \* 1678. "Du jeu du Quinquenove", ed. M.S. de Mora, 1992
- \* 1678(?). "Le jeu du Solitaire", ed. M.S. de Mora, 1992.
- \* 1678(?). "Du jeu de l'Hombre", ed. M.S. de Mora, 1985,1991.
- \* 1698. "Jeu des Productions", ed. M.S. de Mora, 1992.



## CAPÍTULO 21

# Aportaciones metodológicas de la Estadística

**SONIA DE PAZ COBO**

Universidad Rey Juan Carlos

**JUAN MANUEL LÓPEZ ZAFRA**

Universidad Pontificia Comillas

### Introducción

Todo trabajo de investigación se apoya necesariamente en el método. Sin él, sin una construcción adecuada de las hipótesis y sin una correcta selección de la muestra de datos las conclusiones alcanzadas carecerán de todo rigor y en ningún caso serán aceptadas por la comunidad científica. La estadística, como el resto de las ciencias descendientes de la física y las matemáticas, no puede ni debe evitar los aspectos fundamentales establecidos por las distintas escuelas de pensamiento. Sin embargo, al salir al encuentro de ciencias sociales como la economía, la estadística aparece como un instrumento puesto al servicio del investigador y no como un fin en sí misma. Esto conllevará siempre ciertas limitaciones que el investigador social debe conocer y tratar de subsanar.

El presente trabajo se articula como sigue. Tras un repaso de las distintas definiciones que del término estadística se han propuesto a lo largo de la historia, nos centraremos posteriormente en poner de manifiesto la importancia que, desde

una doble perspectiva, supone esta disciplina. En un tercer momento nos detendremos brevemente en las relaciones de la misma con el método en economía. Finalmente elaboraremos las oportunas conclusiones.

## **Primera parte. De las definiciones de Estadística y su relación con la investigación**

Una de las primeras definiciones del término, según señala Schumpeter (1954), se debe a Davenant (1771), quien lo hizo como “el arte de razonar mediante cifras acerca de las cosas referentes al Estado”. En ese sentido, el término se emplearía únicamente en su acepción descriptiva, que durante mucho tiempo constituyó su único contenido. De hecho, el Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua admite dos acepciones del término:

“1-. Censo o recuento de la población, de los recursos naturales e industriales, del tráfico o de cualquier otra manifestación de un Estado, provincia, pueblo, clase, etc.;

2-. Estudio de los hechos morales o físicos del mundo que se prestan a numeración o recuento y a comparación de las cifras a ellos referentes”.

La primera se acerca al habitual significado de lo que se entiende por “estadísticas”, hechos numéricos recopilados y presentados de modo sistemático, en tanto que la segunda se acerca más a lo que en períodos anteriores de la Historia se ha conocido como “aritmética política”.

La generalización de técnicas y métodos estadísticos ha provocado la aparición de definiciones más amplias como la debida a Fisher (1925), “rama de las matemáticas aplicadas a los datos observados”. Esta definición resulta sin embargo restrictiva para muchos autores, como Hoel (1976),<sup>1</sup> para quien “puesto que la teoría se desarrolló al intentar resolver problemas de la vida real, gran parte de ella no se apreciaría totalmente si se prescindiera de tales aplicaciones”. Por ello, y sin olvidar el decisivo y fundamental (en su sentido etimológico) papel de las matemáticas en la estadística, la importancia de la denominada Estadística Aplicada ha provocado la aparición de definiciones más allá de la de Fisher. Así, son destacables la de Kendall y Auckland (1957/1980),<sup>2</sup> “ciencia de recogida, análisis e interpretación de los datos”, y la más general de Mood y Graybill (1972)<sup>3</sup>, para quienes la estadística es “la tecnología del método científico”. Siguiendo la de López Cachero (1988)<sup>4</sup> para quien “la ciencia estadística tiene

<sup>1</sup> Hoel, P.G. (1976). Introducción a la Estadística Matemática. Ariel, Madrid.

<sup>2</sup> Kendall, M.G., y Buckland, W.R. (1957/1980). Diccionario de Estadística. Pirámide, Madrid.

<sup>3</sup> Mood, A. M., y Graybill, F.A. (1972). Introducción a la Teoría de la Estadística. Aguilar, Madrid.

<sup>4</sup> López Cachero, M. (1988). Fundamentos y Métodos de Estadística. Pirámide, Madrid.

como objeto recoger las manifestaciones agrupadas” de determinados fenómenos para, “mediante un proceso de sistematización y análisis, tratar de conocer, total o parcialmente, la realidad”, o también, como síntesis de todas las anteriores, la propuesta por López Menéndez (1992)<sup>5</sup>, “conjunto de métodos para el tratamiento de la información encaminado a la descripción de la realidad y la adopción de decisiones con presencia de incertidumbre”, alcanzamos una visión más que aceptable acerca de lo que entendemos por estadística.

Una característica muy importante de la estadística, y que más aquí debemos tener presente, es su enorme influencia sobre los procesos de investigación tanto pura como aplicada. Piatier (1967)<sup>6</sup> cita a Borel al señalar que “este instrumento ha transformado completamente ciertas ramas de la ciencia. Su faceta probabilística incluso ha resquebrajado sólidas construcciones filosóficas: ha renovado las descripciones de determinismo/probabilismo y la de existencia/esencia”.

Pero toda esta variedad de definiciones no debe sin embargo llevarnos a engaño en cuanto a una posible falta de unidad en el método. Bien al contrario, y de acuerdo con Kendall (1968)<sup>7</sup>, “la estadística en su sentido más amplio es la matriz de todas las ciencias experimentales, y en consecuencia una rama del método científico si no el propio Método Científico”. Aunque pueda parecer exagerada, esta afirmación concuerda con la descripción del método científico de Box (1976)<sup>8</sup>, en el sentido de la sucesión de confrontaciones de la práctica con la teoría y viceversa y produciéndose en consecuencia el progreso de la ciencia, siempre que se disponga de habilidad suficiente para elaborar los modelos adecuados y se efectúe un uso adecuado de las técnicas matemáticas. Efectivamente, la observación de cualquier proceso de investigación nos ofrece una perspectiva reveladora de la importancia de esta disciplina en el ámbito científico: formulación o definición del problema, diseño del experimento (si fuese necesario), organización de los datos, análisis de la información disponible y decisión o inferencia final.

## Segunda parte. Estadística y Método Científico

A continuación pondremos de manifiesto la importancia de la estadística en el método científico desde una doble perspectiva. Por un lado, a partir de los rasgos metodológicos que, como cualquier otra ciencia, comporta esta disciplina, y por

---

<sup>5</sup> López Menéndez, A.J. (1992). Proyecto Docente e Investigador. Concurso de Profesor Titular de Universidad, Oviedo.

<sup>6</sup> Piatier, A. (1967). Estadística y observación económica. Vol. I: Metodología estadística.

<sup>7</sup> Kendall, M.G. (1968). On the future of statistics. A second look. Journal of the Royal Statistical Society, London.

<sup>8</sup> Box, G. (1976). Science and Statistics. Journal of the American Statistical Association, NY.

otro, el papel que desempeña, en cuanto “tecnología del método”, como elemento del avance científico. Serán no sólo necesarias sino casi indispensables las constantes referencias al Método Científico en general y al Método de la Economía en particular, pues unos y otros se encuentran absolutamente relacionados.

Como es bien sabido, una de las principales diferencias en cuanto al método lo constituyen las corrientes racionalista y empirista; la primera, de las que Descartes es una de sus mayores valedores, aplica el método deductivo, pues el científico debería “intuir con claridad y distinción ciertas naturalezas simples o esenciales de cuya percepción clara y distinta pudieran deducirse luego los teoremas o corolarios del sistema”, según la cita del anterior efectuada por Rubio (1990)<sup>9</sup>. Para los segundos, sin embargo, la investigación debe fundamentarse en la observación libre y sin prejuicios de los hechos, a la que se seguirá la formulación de las leyes universales acerca de esos hechos por inferencia inductiva y el enunciado de teorías; Bacon, por ejemplo, se encuentra en esta posición metodológica.

Para Fisher (1935)<sup>10</sup> el razonamiento inductivo depende completamente de la inferencia estadística. Pero el hecho de que la inferencia presuponga algún proceso inductivo no la convierte *per se* en una lógica inductiva “y en consecuencia no permite solucionar por vía estadística el problema de la inducción”, como acertadamente señala López Menéndez (1992).

La síntesis de las dos corrientes de pensamiento la realiza Kant, que en el caso de la estadística se traduce en investigaciones que aúnan la deducción de esquemas abstractos con aplicaciones prácticas. De hecho, no se trata de una deducción por un lado seguida (o precedida) de una inducción por otro, sino que se trata de planteamientos simultáneamente de un tipo y de otro.

La tradición empírica siguió sin embargo, y a pesar de los intentos de síntesis, muy arraigada en el pensamiento científico, lo que se observa claramente en el denominado Círculo de Viena en los años treinta. La defensa que, como ya hemos señalado anteriormente, realizan del método inductivo lleva a Popper a plantear que las ciencias empíricas que lo emplean se encuentran en un error metodológico esencial, llegando incluso a afirmar que no se las puede considerar como tales. Su idea del falsacionismo, prueba universal y definitiva para Popper de la validez de una teoría o hipótesis, tiene una similitud indudable con la habitual metodología estadística de la contrastación de hipótesis, al dividir el enunciado de lo que se pretende verificar (más bien, *no refutar*) en dos partes, una conteniendo lo que se entiende como cierto y la otra lo contrario; se entiende como verosimilitud el excedente del primero sobre el segundo. Mas esta aproximación ha sido más vista

---

<sup>9</sup> Rubio, J.J. (1990). La lógica de la investigación científica en Ciencias Sociales, en Economía y en Hacienda Pública. Hacienda Pública Española, 115, Madrid.

<sup>10</sup> Fisher, R.A. (1935). The logic of inductive inference. Journal of the Royal Statistical Society Series A, London.

por el resto de investigadores que por el propio Popper, quien despreció casi por completo las aportaciones que la estadística podría haber tenido en su método de trabajo.

También es cuanto menos curioso el desprecio que Kuhn hace de la estadística en el cambio de un paradigma a otro; desde el momento en que en el período de ciencia normal los científicos se dedican a plantear (y resolver) cuestiones diversas, que en el límite favorecen el cambio de paradigma, es de suponer que la estadística tendría alguna importancia en ello.

Sin embargo, y de acuerdo con la terminología *kuhniana*, suele otorgarse al comienzo del cálculo de probabilidades el rango paradigmático. Y de acuerdo con el profesor Azorín (1989)<sup>11</sup> dentro del paradigma probabilístico podrían señalarse varios sub-paradigmas:

- Las ideas de regresión y correlación, que desde Galton y Pearson generan una vasta literatura científica, manifestando conexiones con la predicción y la causalidad;
- La corriente central de la inferencia estadística, con los métodos de estimación y contrastación, encabezada en un principio por Fisher y Neyman;
- También en algo que a los autores nos atañe muy directamente, el desarrollo de la inferencia desde la perspectiva del análisis de decisiones, debido a von Neumann y Morgenstern, Wald y Ramsey, por sólo citar algunos; éste último dio lugar a la denominada corriente neo-bayesiana, uno de cuyos mayores exponentes se encuentra en la obra de Savage (1954)<sup>12</sup>. Aquí surge otro de los posibles paradigmas dentro de la ciencia estadística es el bayesiano frente al clásico. Sus principales rasgos diferenciales se centran en el método: así, mientras que la inferencia clásica es básicamente empirista, empleando exclusivamente la información proporcionada por la muestra, la escuela bayesiana utiliza toda la información disponible, no sólo la objetiva (proveniente de la muestra) sino también la basada en juicios personales. Aquí tenemos el caso de lo que Blaug (1994) denominaba “competencia intelectual”, la coexistencia de varios paradigmas sin la clara victoria de uno frente al otro.
- Señala también el profesor Azorín a las funciones discriminantes, relacionándolas con las nociones de analogía y semejanza, básicas no

---

<sup>11</sup> Azorín, F. (1989). *La Inferencia Estadística. Historia de la Ciencia Estadística*. Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

<sup>12</sup> Savage, L. (1954). *The foundations of Statistics*. Dover, New York.

sólo en la inferencia estadística sino también en la filosofía de la ciencia.

- Y en un artículo anterior igualmente clarificador, Azorín (1984)<sup>13</sup> señalaba que “desde 1964 aparece lo que en terminología de Kuhn podría denominarse un nuevo paradigma, que recoge un aspecto tan antiguo como la incertidumbre: la borrosidad o falta de nitidez”. La relación entre lo probabilístico y lo borroso puede ser establecida de forma rigurosa a partir de la teoría general de los conjuntos borrosos o difusos, con múltiples aplicaciones en muy diversas áreas científicas.

### **Tercera parte. Estadística y Método en Economía**

El mayor exponente de revolución científica dentro de la economía lo representa el keynesianismo que, aunque parece que ya superado, no deja de suponer una de las mayores aportaciones a la ciencia económica. Es Piatier (1967) quien afirma al hablar de la importancia de la estadística dentro del análisis keynesiano que “la relación con los estudios estadísticos adquiere en adelante todo su sentido: la estadística halla la ocasión de realizar un nuevo progreso (...). La estadística así enriquecida dará lugar a múltiples investigaciones, puesto que el modelo teórico tendrá en adelante la pretensión de aproximarse cada vez más a la realidad, debiendo proporcionar el examen de situaciones concretas resultados fructuosos”. En este sentido, y como aplicación de lo establecido por Piatier aunque en un ámbito no keynesiano pero sí económico pueden consultarse por ejemplo las referencias de Izquierdo y López Zafra (1997)<sup>14</sup> y López Zafra e Izquierdo (1998)<sup>15</sup>. En ellas se observa claramente como el análisis estadístico permite avalar o refutar la construcción económica teórica. Es ésta una de las principales tendencias hoy en día en el campo de la investigación económica.

Quien sí concede a la estadística una importancia fundamental en el desarrollo de la ciencia es Lakatos, progenitor del concepto de Programas de Investigación Científica, el conjunto de teorías científicas interrelacionadas que no pueden ser evaluadas de forma aislada y que impide por tanto la formación del paradigma kuhniiano. La refutación metodológica o falsación, que para Lakatos tiene una importancia indudable, está para este autor en la “base filosófica de alguno de los

---

<sup>13</sup> Azorín, F. (1984). Estadística, Ciencia y Sociedad. Selección de Escritos Estadísticos. Instituto Nacional de Estadística, Madrid.

<sup>14</sup> Izquierdo, G., y López Zafra, J.M. (1997). El Empleo y el consumo en España: el papel de las expectativas y el ahorro preventivo. En “Qué ocurre con el consumo”, Revista del I.E.E. nº4/96, I.E.E., Madrid.

<sup>15</sup> López Zafra, J.M., e Izquierdo, G. (1998). Reforma fiscal y globalización económica: ¿Están relacionados los tipos marginales con la recaudación?, Revista del I.E.E. nº 2 y 3 /98, I.E.E., Madrid.

desarrollos más importantes de la estadística moderna”, apoyando esta idea en los trabajos de Neyman y Pearson.

## Conclusiones

En cualquier caso, y sea cual sea la postura que adopte el investigador, todo método razonable deberá encaminarse hacia el progreso de la ciencia, y así, de acuerdo con Stigler (1987)<sup>16</sup>, son necesarios y pertinentes “tres tipos de trabajo que, con los únicos requisitos de diligencia y competencia profesional, contribuyen al progreso científico”. Éstos serán los contrastes de hipótesis (eminentemente empíricos), la acumulación de conocimientos y la elaboración de nuevas teorías. Tres tipos de trabajo que, tal y como he puesto de manifiesto, están presentes en la estadística, disciplina que entonces no cabe duda que puede y debe ser considerada como motor del progreso científico.

## Bibliografía

- AZORÍN, F. (1984): *Estadística, Ciencia y Sociedad. Selección de Escritos Estadísticos*. Instituto Nacional de Estadística, Madrid.
- (1989): *La Inferencia Estadística. Historia de la Ciencia Estadística*. Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- BOX, G. (1976): “Science and Statistics”. *Journal of the American Statistical Association*, NY.
- FISHER, R. A. (1935): “The logic of inductive inference”. *Journal of the Royal Statistical Society Series A*, London.
- HOEL, P. G. (1976): *Introducción a la Estadística Matemática*. Ariel, Madrid.
- IZQUIERDO, G. y LÓPEZ ZAFRA, J. M. (1997): “El Empleo y el consumo en España: el papel de las expectativas y el ahorro preventivo”. En “Qué ocurre con el consumo”, *Revista del I.E.E.* nº4/96, I.E.E., Madrid.
- KENDALL, M. G. (1968): “On the future of statistics. A second look”. *Journal of the Royal Statistical Society*, London.
- KENDALL, M. G. y BUCKLAND, W. R. (1957/1980): *Diccionario de Estadística*. Pirámide, Madrid.
- LÓPEZ CACHERO, M. (1988): *Fundamentos y Métodos de Estadística*. Pirámide, Madrid.

---

<sup>16</sup> Stigler, G.J. (1987). *Essays in the History of Economics*. The University of Chicago Press, Chicago.

- LÓPEZ MENÉNDEZ, A. J. (1992): *Proyecto Docente e Investigador*. Concurso de Profesor Titular de Universidad, Oviedo.
- LÓPEZ ZAFRA, J. M. e IZQUIERDO, G. (1998): “Reforma fiscal y globalización económica: ¿Están relacionados los tipos marginales con la recaudación?”. *Revista del I.E.E.* nº 2 y 3 /98, I.E.E., Madrid.
- MOOD, A. M. y GRAYBILL, F. A. (1972): *Introducción a la Teoría de la Estadística*. Aguilar, Madrid.
- PIATIER, A. (1967): *Estadística y observación económica*. Vol. I: Metodología estadística.
- RUBIO, J. J. (1990): “La lógica de la investigación científica en Ciencias Sociales”. En *Economía y en Hacienda Pública*. Hacienda Pública Española, 115, Madrid.
- SAVAGE, L. (1954): *The foundations of Statistics*. Dover, New York.
- STIGLER, G. J. (1987): *Essays in the History of Economics*. The University of Chicago Press, Chicago.

## CAPÍTULO 22

# Los índices de precios del comercio exterior en España: Una revisión histórica

IRENE RIOBÓO LESTÓN  
Universidad Rey Juan Carlos

### Introducción

El sector exterior es aceptado como uno de los pilares fundamentales en el desarrollo económico de un país, por lo que en los últimos años se ha puesto de manifiesto un creciente interés por el perfeccionamiento de indicadores que permitan analizar la evolución de los precios de las exportaciones y las importaciones de bienes de una determinada área geográfica, así como conocer con suficiente aproximación la evolución en términos reales de este sector.

Con el presente trabajo se pretenden llevar acabo una revisión histórica de los deflatores del comercio exterior nuestro país, analizando las contribuciones metodológicas realizadas en este campo. Desde que en 1936 se publicaron los primeros índices en España, tal y como tendremos ocasión de comprobar, se han ido utilizando distintos índices potencialmente viables para la deflatación de los flujos comerciales, registrándose importantes avances metodológicos en su obtención.

Los epígrafes presentados a continuación se centran, en primer lugar, en la evolución histórica de dichos indicadores, que puede ser dividida en dos etapas diferencias en función del tipo de indicador manejado: con anterioridad y posterioridad a 1980. A continuación se presenta la metodología aplicada en la actualidad en España y, finalmente, se concluye recogiendo las principales referencias bibliográficas en esta materia.

## **Evolución metodológica**

Las series de índices de precios del comercio exterior de España se remontan al año 1826 y nos permiten distinguir las dos etapas anteriormente mencionadas. La primera de ellas, que abarcaría hasta el año 1980, se corresponde con índices de precios (IPs) obtenidos a partir de la observación de los precios de una muestra de los productos más importantes comerciados en el año base, de modo que dichos productos están definidos con total precisión, lo que constituye la principal ventaja de estos índices. Esta muestra, a pesar de estar constituida por un reducido número de productos, abarca un alto porcentaje de las importaciones y exportaciones totales del país dada la alta concentración de los productos comerciados.

En una segunda etapa estos índices de precios reales (IPs) son sustituidos por los índices de valor unitario (IVUs). Se trata de indicadores elaborados a partir de los documentos de aduanas, que no aportan información sobre productos individuales sino sobre agrupaciones de productos definidas por la nomenclatura estadística del comercio internacional vigente. La utilización de estas cifras agregadas puede suponer una limitación para los IVUs, ya que los cambios en los valores unitarios no necesariamente han de estar vinculados a cambios en los precios, sino que también pueden atribuirse a cambios en las cantidades. Este fenómeno es el denominado “efecto composición” y se reducirá cuanto mayor sea la homogeneidad de los productos que constituyen la rúbrica. Por otra parte, los importantes beneficios que se derivan de los IVUs son principalmente dos: su reducido coste de obtención y el hecho de trabajar con prácticamente la totalidad de los productos comerciados. Estos beneficios han pesado más que los inconvenientes, por lo que en la actualidad son la práctica general de los países que han abordado este problema.

Pasamos a continuación a profundizar y exponer de modo más conciso ambas etapas metodológicas.

### **1. Primera etapa: Hasta 1980**

En España los primeros indicadores elaborados con este fin fueron publicados en el *Boletín Mensual* de enero, febrero y marzo de **1936**, del Ministerio de Trabajo, Sanidad y Previsión, bajo la denominación de “números índices de

precios-oro<sup>1</sup> en frontera”. Se trata de índices de precios tipo Laspeyres con base en 1934, obtenidos a partir de los datos ofrecidos por las instituciones aduaneras para el territorio estadístico nacional (Península e Islas Baleares), datos que proporcionan el peso y el valor en factura de las transacciones internacionales de mercancías. Son índices anuales para el periodo 1934-1935 por flujos, pero no únicamente para el total de exportaciones e importaciones, sino también para grandes grupos, clases del arancel y productos especiales. Estos indicadores fueron también elaborados para el año 1936, con la única diferencia de que en este caso el periodo base es 1935, sin embargo, durante el periodo correspondiente a la Guerra Civil Española su publicación se ve interrumpida.

Es **1950** cuando el Instituto Nacional de Estadística, en el *Boletín de Estadística* número 62, reanuda la publicación de los índices de precios del comercio exterior de España. Se trata de índices para el total de exportaciones y el total de importaciones, tipo Paasche con base fija en 1935, obtenidos de los registros facilitados por la Sección Estadística de la Dirección General de Aduanas sobre el territorio peninsular y las Islas Baleares. De dicha información son seleccionadas las partidas arancelarias más relevantes, 96 para las importaciones y 66 para las exportaciones. En cuanto a la periodicidad de estos índices, cabe destacar que la serie publicada es anual para el periodo 1940-1948, siendo mensuales a partir de octubre del año 1949.

Por otra parte, la Oficina de Estadística de las Naciones Unidas, comienza a promover la obtención de estos indicadores para un periodo anterior a la Segunda Guerra Mundial y para otro posterior, es decir, atendiendo a dos sistemas distintos de partidas arancelarias, con el fin de estudiar las variaciones debidas a la guerra y las debidas a cambios en las mercancías comerciadas. Así, ante las recomendaciones de la ONU, en el *Boletín de Estadística* número 65 de mayo de 1950, se inicia la publicación de los denominados “índices de posguerra” para el comercio exterior de España con base 1948, a la vez que se mantiene la publicación de los anteriores índices con base 1935, considerados éstos “los índices anteguerra”. Los datos manejados en la obtención de esta nueva serie son proporcionados por la Dirección General de Aduanas. En concreto, se seleccionan 110 partidas arancelarias para las importaciones y 60 para las exportaciones. La periodicidad de las series presentadas, al igual que anteriormente, es anual (se inicia en 1946) y mensual (se inicia en septiembre de 1949). El resto de características metodológicas coincide con las correspondientes a la base 1935.

Ante las modificaciones producidas por el transcurso de los años en la estructura del comercio exterior, surge la necesidad de un cambio de base, así en el número 152-153 del *Boletín de Estadística*, correspondiente a agosto-septiembre de **1957**, se publica un nuevo sistema de índices de precios del comercio exterior con base 1953. Una diferencia importante de este nuevo sistema respecto a los

---

<sup>1</sup> Véase Sequeiros y Fernández (2003).

anteriores radica en que en el territorio estadístico nacional se incluyen Canarias, Ceuta y Melilla. Este sistema supone la supresión de los índices con base 1935, sin embargo, hasta el año 1960 se mantiene la publicación de los índices base 1948. Para los años 1954-1956 sólo se presenta el índice anual, y es a partir de 1957 cuando se dispone también de la serie mensual.

En 1958 el Instituto Nacional de Estadística publica la monografía *“Comercio exterior de España. Números índices (1901-1956)”* en la que se presentan las series históricas anuales de índices de importación y de exportación tipo Paasche, correspondientes a este periodo. En el año base, 1935, las partidas seleccionadas fueron 96 para el flujo importación y 65 para el de exportación, representando una cobertura en el año base del 73,4% y del 85,5%, respectivamente. Dichas series han de ser tomadas con cautela, dado el problema que supone la heterogeneidad de los valores de las transacciones realizadas en el periodo estudiado. Tal y como se recoge en esta publicación *“las unidades monetarias en que se hace la valoración son pesetas, pero es muy difícil, si no imposible, establecer una equivalencia real y cierta entre las de los distintos años”*.

A partir de 1964 el INE elabora los índices de precios del comercio exterior con base 1963, sin embargo, no los hace públicos hasta el número 385-386 del *Boletín de Estadística* de principios de 1977, de modo que hasta 1976 se dispone de índices de precios con base en 1953. La nueva metodología se publica en la monografía *“Comercio exterior de España. Números índices (base 1963=100)”*, donde se presentan las series anuales desde 1964 y mensuales desde 1967, ambas hasta 1975. Para el cálculo del índice, que sigue siendo un Paasche de base fija, se seleccionan 475 partidas para las importaciones, que suponen el 81,20% del total de mercancías importadas, y 138 para la exportación, un 77,18% del total.

En los anteriores sistemas (excepto en el primero presentado) los datos se ofrecen únicamente para el total de exportaciones e importaciones, sin embargo, con este último se dispone también de índices para distintas agrupaciones, ocho en el caso del flujo importación<sup>2</sup> y nueve para exportación<sup>3</sup>.

Esta metodología cierra una etapa en la elaboración de los deflatores del comercio exterior, que da paso a otra más compleja debido a la sustitución de los índices de precios *puros* (IPs) por los índices de valor unitario (IVUs).

---

<sup>2</sup> Bienes de consumo, alimentos, bebidas y tabaco; otros bienes no duraderos; bienes duraderos; bienes de producción; materias primas; semielaborados y bienes de inversión.

<sup>3</sup> Agricultura; explotación de minas y canteras; industrias de manufacturas; alimentos, bebidas y tabaco; textiles; metálicas básicas; transformación de metales; químicas y derivadas del petróleo y del carbón y otras industrias de manufacturas.

## 2. Segunda etapa: De 1980 en adelante

Los orígenes de esta segunda etapa podemos situarlos en la necesidad de adaptar la nomenclatura arancelaria a la vigente en la Comunidad Económica Europea, lo que introduce importantes modificaciones que suponen cambios sustanciales en los criterios de agrupación de los productos. La clasificación estadística adoptada es la *Nomenclatura Aduanera de Bruselas* (NAB), según la cual los bienes se agrupan en secciones, que a su vez se subdividen en capítulos (dos dígitos), partidas (cuatro dígitos) y posiciones (seis dígitos).

Estas modificaciones conducen a la publicación, en el número 1729 del *Boletín de Información Comercial Española* de mayo de 1980, de los primeros índices de valor unitario (IVUs) de comercio exterior español. Estos índices son elaborados por la Secretaría General Técnica del Ministerio de Economía y Comercio con periodicidad trimestral y anual, para el total de exportaciones e importaciones y para cinco grupos de productos por flujo: alimentos, materias primas y semimanufacturas, productos energéticos, bienes de equipo y manufacturas de consumo.

La fuente utilizada es la información proporcionada por la Dirección General de Aduanas sobre valores y cantidades totales de los intercambios con el exterior, pero no para productos individuales, sino para conjunto de productos agrupados en posiciones estadísticas, definidas a seis dígitos por la NAB. Así, para cada posición se obtiene un valor unitario como cociente entre el valor del mismo y la cantidad comerciada, de modo que se trata de un precio medio por unidad física de todos los productos incluidos en dicha posición. De todas las posiciones de las que se dispone información se realiza una selección inicial en función de los siguientes criterios:

- Homogeneidad de los distintos productos que componen cada posición, con objeto de reducir el ya comentado “efecto composición”.
- Continuidad en el comercio de los productos, con objeto de garantizar cierta estabilidad.
- Representatividad del valor de la posición en el total de la partida a la que pertenezca, estudiando su evolución temporal.
- Grado mínimo de cobertura, de modo que la proporción que la posición represente respecto a la partida sea al menos del 30%.

A diferencia de anteriores metodologías, en ésta los índices de valor unitario se construyen únicamente con los valores de las posiciones estadísticas seleccionadas por cumplir estos requisitos expuestos. Por otra parte, con objeto de asegurar la representatividad de los índices correspondientes, las posiciones estadísticas que verifiquen estos criterios son sometidas a un control de calidad, consistente en

eliminar las posiciones con una variación trimestral de su valor unitario superior al 100% del crecimiento e inferior al 80% de la disminución. Además, tal y como se presenta en Feito y Maravall (1980), dado que el valor unitario del periodo base, año 1976, es considerado como aceptable, se establecen respecto al mismo unas tasas de variación máxima y mínima de los valores unitarios en cualquier momento del tiempo.

En la construcción de los índices de valor unitario el procedimiento seguido presenta una estructura jerarquizada. El índice elemental de cada posición estadística (definida a seis dígitos) se obtiene como cociente de los valores unitarios entre el periodo corriente y el correspondiente a todo el periodo base. A partir de este paso se procede a la obtención de índices agregados, comenzado por los IVUs de las distintas partidas (definidas a cuatro dígitos), así, los índices elementales de todas las posiciones que constituyen cada partida se combinan mediante un índice de Paasche de base fija, ponderado por el valor comercial en el periodo corriente en dicha partida. Una vez que se dispone de estos índices para todas las partidas se procede, operando de igual modo, al cálculo de los índices agregados para cada uno de los grupos económicos establecidos por flujos, y finalmente se procede a la agregación de los mismo con el fin de obtener el IVU total de la exportación y el IVU total de la importación.

En Cabetas Hernández y Martín Pliego (1981), donde esta nueva metodología también es presentada, se lleva a cabo una comparativa de la misma con otros índices de comercio exterior elaborados por otras instituciones como el Instituto Nacional de Estadística, el Banco Hispano Americano o el Banco de Bilbao. En este sentido, cabe destacar que también otras instituciones, como el Banco de España o la Dirección General de Aduanas e Impuestos Especiales<sup>4</sup>, también elaboraron índices de valor unitario para el comercio exterior del territorio español.

Otra interesante aportación fue el trabajo de Leandro Prados de la Escosura, publicado en 1982 por el Banco de España, en el cual se presentan para el total de las importaciones y el total de las exportaciones las correspondientes series anuales de índices de precios, que abarcan desde el año 1826 hasta 1913. De este modo se ofrecen las series cronológicas que más atrás se remontan en el tiempo publicadas en materia de índices de precios del comercio exterior de España. Dichos indicadores son obtenidos mediante la expresión propuesta por Paasche, considerando como año base 1890.

En **1983** la Secretaría General de Comercio, del Ministerio de Economía y Hacienda, publica en el *Boletín de Información Comercial Española* de julio-agosto<sup>5</sup> la metodología de un nuevo sistema de índices de valor unitario del comercio exterior español. Este cambio metodológico se debe a revisiones de la

---

<sup>4</sup> Véase Martín Bourgón, F. (1981) y (1986).

<sup>5</sup> Véase Ferreiro Chao y Hernández Delgado (1983).

nomenclatura arancelaria realizadas con el propósito de armonización respecto a la Comunidad Económica Europea, dado que en 1981 entra en vigor la *Nomenclatura de mercancías para las estadísticas del comercio exterior entre los Estados miembros* (Nomenclatura NIMEXE<sup>6</sup>). Con esta nueva clasificación los productos comerciados se agrupan en 6 grupos: alimentos, materias primas, productos energéticos, manufacturas intermedias, bienes de equipo y bienes de consumo no alimenticio, de forma que los tres últimos constituyen el grupo de manufacturas. Otra característica diferenciadora de esta nueva metodología es la fórmula elegida para el cálculo de los IVUs, que fue la de un Paasche encadenado entre periodos consecutivos, siendo el periodo de referencia 1981 y la periodicidad de los mismos trimestral y anual.

En noviembre de **1984** la Dirección General de Previsión y Coyuntura (DGPC) publica una nueva metodología para la obtención de los índices de valor unitario, siendo el principal cambio la recuperación de la fórmula de Paasche, en este caso con base fija en 1985. En octubre de 1989 se produce otro cambio considerable ya que la DGPC presenta en *Síntesis Mensual de Indicadores Económicos* los índices de valor unitario adaptados a las modificaciones producidas en 1988 en las clasificaciones del comercio exterior: la introducción de la clasificación arancelaria TARIC (Arancel integrado de las Comunidades Europeas) y de la revisión 3 de la CUCI (Clasificación Uniforme de Comercio Internacional). Atendiendo a estas clasificaciones, los nuevos índices se elaboraron con periodicidad mensual por flujos para las siguientes categorías: bienes de consumo (total, alimenticio y no alimenticio), bienes intermedios (total, productos energéticos, productos no energéticos, materias primas no energéticas y manufacturas semielaboradas), bienes de capital y para el total de exportaciones y el de importaciones.

Los conjuntos de productos sobre los que son obtenidos los valores unitarios (cocientes entre valor y peso) son los grupos CUCI. A partir de los mismos se calculan los índices elementales, considerando atípico el IVU no incluido en el intervalo de amplitud de dos desviaciones típicas. En tal circunstancia, dicho índice es sustituido por una estimación basada, entre otros aspectos, en el tipo de bien y la tendencia observada en periodos anteriores. La fórmula empleada para el cálculo de los índices agregados sigue siendo la de Paasche, pero de nuevo encadenado, considerando como periodo base el mes inmediatamente anterior, mientras que el de referencia se mantiene en el año 1985.

En el año **1992** se produce otro importante cambio en la clasificación del comercio exterior, ya que se abandona definitivamente la utilización de la CUCI, siendo ésta reemplazada, de acuerdo con la Contabilidad Nacional, por la denominada *Clasificación por Grupos de Utilización* (GU), en la que los bienes quedan clasificados por su destino económico, suponiendo una mayor precisión en el análisis por grupos de productos respecto a las clasificaciones anteriormente

---

<sup>6</sup> Se trata de una adaptación de la NAB para la Comunidad Europea.

utilizadas. Este hecho lleva a la DGPC a la correspondiente adaptación de los IVUs, renovando también el año base, que se situó en el 1986 por ser especialmente significativo para la economía de nuestro país, no sólo por su entrada en la Comunidad Europea, sino también por la implantación del Impuesto sobre el Valor Añadido, haciéndolo coincidir con el periodo base de la Contabilidad Nacional.

En diciembre de 1992 se suspende la publicación de los IVUs por considerarse que los resultados obtenidos en los primeros meses del año 1993 eran poco fiables y representativos de la realidad económica. Comienza así un periodo de adaptación al nuevo sistema de recogida de información de comercio exterior, tras el establecimiento del Mercado Único Europeo el 1 de enero de 1993. A partir de esta fecha, para la recogida de información estadística es obligatoria la presentación del Documento Único Administrativo (DUA) en el caso de operaciones comerciales con países no pertenecientes a la UE; mientras que para el comercio intracomunitario la recogida de información estadística se rige por el Sistema Intrastat. En diciembre de 1993, en *Síntesis Mensual de Indicadores Económicos*, se reanuda la publicación periódica de los índices de valor unitario.

En mayo de 1995, en esta misma publicación, se presenta una nueva metodología para la obtención de estos indicadores, la cual supone el comienzo de una nueva etapa metodológica en la obtención de los índices de valor unitario del comercio exterior. La DGPC, encargada de su elaboración, basa el proceso de cálculo en el correcto tratamiento de las denominadas “clases elementales”. Una clase elemental se define como un conjunto de productos que simultáneamente pertenecen al mismo grupo de utilización (a 4 dígitos), al mismo grupo CUCI (revisión a 3 dígitos) y a la misma zona geográfica de origen o destino (dependiendo de si se trata de un flujo importación o exportación), de modo que se constituyen sumando los valores y pesos de los registros administrativos del Departamento de Aduanas e Impuestos Especiales de la Agencia Estatal Tributaria que presenten estas características comunes. La clase elemental pasa a ser el nivel de máxima desagregación de los valores unitarios, por lo que una vez constituidas para el conjunto del año base, se procede a su tratamiento con el objeto de que los valores unitarios calculados sean representativos del total de operaciones registradas. Así, del conjunto total de clases elementales son seleccionadas las que cumplen una serie de propiedades, lo cual permite subsanar problemas vinculados con la excesiva heterogeneidad o con tamaños muestrales insuficientes.

Las clases elementales han de estar constituidas por un número suficientemente elevado de observaciones para minimizar el riesgo de que en un determinado mes no se registre ninguna observación en alguna clase, lo que imposibilitaría la obtención de los correspondientes valores unitarios. Además, parece lógico pensar que la estabilidad de los valores unitarios será mayor cuanto mayor sea el tamaño de las clases elementales. Sin embargo, cuanto mayor sea el número de clases elementales manejadas, siendo éstas lo más homogéneas posible, más se reducirá el

efecto composición. Como se puede observar, se trata de objetivos contradictorios, por lo que es necesario encontrar un equilibrio entre ambos, para lo cual en la metodología base 1991 se opta por seguir el procedimiento expuesto a continuación.

El primer paso consiste en eliminar las clases cuyo valor pueda crear distorsiones debidas, bien a que su presencia no esté asegurada la mayoría de los meses, o bien a que sus precios no se ajusten a la evolución general. Además, para la obtención de buenas estimaciones se opta por suprimir los registros con un peso inferior a 100 gramos y aquéllos con un valor unitario extremo, eliminándolos mediante alguna técnica de tratamiento de datos atípicos que, con carácter general, se basa en medias recortadas 10+10, de forma que se prescinde de los 10 registros con precios más bajos y de los 10 con precios más altos.

A continuación se detectan aquellas clases con un tamaño mínimo previamente establecido, con objeto de disponer de un mínimo de registros mensuales en cada clase, de modo que el cálculo de los correspondientes IVUs sea regular. Suponiendo que el número mensual de registros recogidos en una clase elemental sigue una distribución de Poisson, se puede calcular la probabilidad de que para un mes dado no haya ningún registro, para distintos valores del promedio. A nivel general se considera que las clases elementales debían de estar constituidas como mínimo por un promedio de 20 registros mensuales en el año base, garantizando así con una probabilidad del 95,5% la existencia de al menos 10 registros con los que obtener el valor unitario.

A pesar de que la regla general en el año base es la de seleccionar las clases con un mínimo de 240 observaciones anuales, existen casos excepcionales en los que se flexibiliza este criterio, teniendo en cuenta el volumen de comercio, de modo que se rescatan aquellas clases que suponen más del 0,05% del valor de la exportación o de la importación de todo el periodo base, y que suponen una mejora en la cobertura correspondiente a la zona geográfica y al grupo de utilización a un dígito.

Una vez analizado el problema de la permanencia temporal se estudia si las clases seleccionadas cumplen otra serie de requisitos basados en la homogeneidad y la cobertura intraclase.

La homogeneidad de las clases elementales se mide a través del coeficiente de variación del valor unitario, de forma que habitualmente una clase se considera suficientemente homogénea cuando dicho coeficiente es inferior al 35%. Si este requisito no se cumple, la clase no será seleccionada.

La cobertura intraclase se define como el porcentaje que representa el valor de los registros no eliminados, es decir, los efectivamente empleados para estimar el valor unitario de la clase, respecto al valor total de los registros iniciales de dicha clase elemental. El criterio de la cobertura intraclase suele consistir en seleccionar aquellas clases que al menos alcancen la cota del 50%.

Una vez que se dispone de las clases que verifican los requisitos expuestos, se obtiene para cada una de ellas el índice simple de valor unitario correspondiente al mes corriente como el cociente entre el valor unitario de la clase en el mes en curso y su valor unitario medio en el año base.

En cuanto a las clases que no han sido seleccionadas por no cumplir los requisitos establecidos, se llevará a cabo un proceso de asignación de índices elementales que permita la participación de las mismas en el cálculo de los índices agregados. El procedimiento general de imputación de índices consiste en asignar a una clase, definida por el conjunto de las mercancías que pertenecen simultáneamente al mismo grupo de utilización, a la misma zona geográfica de origen o destino y al mismo flujo comercial, el IVU de este agregado calculado con las clases que sí han sido seleccionadas ponderadas por el valor del periodo corriente, ya que se trata de índices tipo Paasche.

En el momento en que todas las clases elementales tienen un índice de valor unitario se procede a la obtención de los IVUs agregados aplicando la fórmula de Paasche con base fija, siendo ésta el valor unitario medio de 1991. Los índices agregados se obtienen aplicando dicha expresión al nivel de agregación inmediatamente anterior, de modo que agrupando los índices elementales mediante un Paasche se obtendrán los índices por grupos de utilización a cuatro dígitos, que a su vez nos llevarán a los índices por grupos de utilización a dos dígitos y así sucesivamente hasta los niveles de máxima agregación: grupos de utilización, por áreas geográficas<sup>7</sup>, por sección CUCI, por sectores industriales y por totales de importación y exportación.

En *Síntesis de Indicadores Económicos* de marzo de 1998 la Subdirección General de Previsión y Coyuntura (antigua DGPC) publica, con carácter provisional, los IVUs base 1995. La correspondiente metodología, que se presentó inicialmente en la publicación de abril, y de modo más completo en el año 2001 en una monografía del Ministerio de Economía, es muy similar a la empleada en el sistema anterior, aunque han sido introducidas determinadas modificaciones que pasamos a exponer.

Uno de los cambios a destacar es la introducción del “peso o tipo unidad” como nuevo parámetro para definir las clases elementales, que en esta metodología se consideran como el conjunto de artículos que pertenecen simultáneamente al mismo grupo de utilización (a 4 dígitos), al mismo grupo CUCI (revisión a 3 dígitos), a la misma zona geográfica de origen o destino y al mismo tipo de unidad de medida. El valor unitario de cada clase se calcula mediante una expresión donde

---

<sup>7</sup> Se distinguieron tres zonas geográficas: Comunidad Europea (los doce países que en 1991 constituían la CE), resto de OCDE (países de la OCDE no incluidos en la UE) y resto del mundo (países que no pertenecen a la OCDE).

se maneja el peso en aquellos casos en los que el tipo de unidad de medida de la clase sea el kilogramo, y el número de unidades en los casos restantes.

Por otra parte, al igual que en la anterior metodología, se identifican aquellas clases elementales que verifican una serie de criterios y cuyo valor unitario será estimado de forma directa como una media recortada, que con carácter general es una media simétrica  $10+10^8$ . Las clases no seleccionadas por no cumplir los requisitos anteriormente expuestos tendrán un índice imputado, calculado mediante la información registrada en las clases seleccionadas. Las imputaciones se han clasificado en dos grupos: imputaciones sin información e imputaciones con información. Las primeras son las realizadas con carácter general y consisten en asignar a la clase “Zona\*GU\*CUCI\*Tipo de unidad” el IVU del agregado “Zona\*GU”. Las imputaciones con información son las realizadas en aquellos casos en los que las clases elementales no seleccionadas tienen un importante volumen de comercio. Este tipo de imputación consiste en asignar a las clases no seleccionadas el IVU de otra que ha sido seleccionada (o el IVU medio de un conjunto) que presente alguna de las siguientes características:

- Sólo difiere en la variable zona geográfica, caso en el que se trataría de una imputación por zona geográfica.
- Sólo difiere en el tipo de unidad de medida, caso en el que se trataría de una imputación por unidad de medida.
- Comparte la misma zona geográfica y el mismo grupo de utilización o el mismo grupo CUCI, caso en el que se trataría de una imputación especial.

En cuanto a los índices agregados, los nuevos indicadores siguen siendo tipo Paasche con base fija, pero con base en 1995, coincidiendo así con la base de la Contabilidad Nacional. Al igual que en la base anterior, se han elaborado a distintos niveles de agregación, de forma que los índices más agregados se obtienen aplicándoles esta fórmula a los correspondientes al nivel inmediatamente anterior. Los IVUs se agregaron por grupos de utilización económica, áreas geográficas<sup>9</sup> y secciones CUCI. Sin embargo, los índices por sectores industriales son sustituidos por los IVUs por ramas de producción, los cuales, a través de una adecuada agrupación permiten la obtención de los anteriores.

Como última novedad respecto a la metodología anterior destacar que el IVU de un agregado puede considerarse suficientemente representativo si el valor del comercio de las clases elementales seleccionadas (aquellas con cálculo directo del valor unitario) que lo constituyen supone al menos el 50% del valor total del

<sup>8</sup> En determinados casos concretos se recurrió a medias recortadas  $5+15$  o  $15+5$ .

<sup>9</sup> Se distinguieron cinco zonas geográficas: Unión Europea (los quince países que en 1995 constituían la UE), No UE, OCDE, países no comunitarios de la OCDE y países no desarrollados.

agregado, de forma que cuanto mayores sean los niveles de agregación, mayores serán los problemas de representatividad. Este porcentaje recibe la denominación de cobertura del IVU.

Tras la revisión histórica presentada en este epígrafe sobre las principales características metodológicas de los sistemas aplicados a nivel nacional en la obtención de deflatores del comercio exterior, pasamos a describir la situación en la que actualmente nos encontramos a escala nacional en materia de tales indicadores.

## **Metodología actual**

En la actualidad, en España se dispone de dos tipos de indicadores de precios de las importaciones y exportaciones: los índices de valor unitario, que continúan siendo elaborados periódicamente por la Subdirección General de Análisis Macroeconómico del Ministerio de Economía y Hacienda, y los índices de precios de exportación e importación de productos industriales, elaborados mensualmente desde el año 2006 por el Instituto Nacional de Estadística. Se presentan a continuación las principales características de ambos indicadores.

En lo referente a la nueva metodología seguida en la obtención de los IVUs, se dispone de un nuevo sistema introducido en *Síntesis de Indicadores Económicos* del mes de febrero de **2005**. Los IVUs base 2000 presentan respecto a la anterior metodología importantes cambios referidos a la clasificación de los productos, la imputación de índices, la fórmula de cálculo de IVUs agregados y las agrupaciones finales y sus acotaciones.

Una importante novedad de este nuevo sistema ha consistido en la inclusión de las profundas modificaciones llevadas a cabo en la correspondencia entre la *Nomenclatura Combinada* y la *Clasificación por Grupos de Utilización*, que han supuesto una nueva desagregación del comercio exterior por grupos de productos según el destino económico de los bienes.

En cuanto a la constitución de las clases elementales, que como en anteriores sistemas se realiza a partir de los datos facilitados por el Departamento de Aduanas e Impuestos Especiales de la Agencia Estatal de Administración Tributaria, no se introducen modificaciones en su definición, de modo que se trata del conjunto de productos generado por la suma de los valores y pesos de los registros de aduanas que tengan como características comunes el grupo de utilización, el grupo CUCI, la zona geográfica y la unidad de medida. Como en anteriores metodologías, con el objetivo de garantizar la representatividad de las clases, son excluidas aquéllas que puedan llevar a un comportamiento errático del comercio exterior y posteriormente, las restantes se someten al control de determinados requisitos referidos a tamaño, cobertura y variabilidad. De este modo, las clases elementales

que pasen los filtros establecidos tendrán un índice de valor unitario calculado directamente, mientras que en caso contrario, el IVU será imputado.

En cuanto a las alternativas de imputación anteriormente expuestas, cabe destacar que han sido eliminadas las imputaciones con información debido a que en ocasiones eran consideradas estimaciones atípicas. Por tanto, únicamente se llevan a cabo imputaciones sin información, asignando a la clase definida mediante la combinación “Zona\*GU\*CUCI\*Tipo de unidad” el índice correspondiente al agregado “Zona\*GU”, obtenido de los índices simples de las clases seleccionadas.

El siguiente paso consiste en calcular los índices compuestos que, siguiendo las recomendaciones de Eurostat y del Fondo Monetario Internacional, tomarán la formulación de Paasche encadenados, considerando como periodo base la media del año inmediatamente anterior. Aplicando las propiedades de los índices encadenados, los IVUs se presentan referidos al año 2000, coincidiendo así con la nueva base de la Contabilidad Nacional.

Otra novedad incluida en este sistema es la acotación de los IVUs compuestos, que consiste en el siguiente procedimiento. Al calcular los índices encadenados se establecen unos límites mínimos y máximos de tolerancia para la variación de los valores unitarios. Se trabaja con el intervalo [50;150], fijado en función de la variabilidad de los IVUs, de forma que al índice se le asignará el valor 50 o 150 si su valor resulta menor que el extremo inferior de este intervalo o mayor que el superior, respectivamente.

En cuanto a los índices agregados que se hacen públicos mensualmente, distinguimos las siguientes agrupaciones:

- Índices para el total, bienes de consumo, bienes de capital y bienes intermedios para las zonas geográficas: países de la Unión Europea, países de la zona euro, países de la Unión Europea no pertenecientes a la zona euro, países no pertenecientes a la Unión Europea, países de la OCDE, países de la OCDE no pertenecientes a la Unión Europea y países no pertenecientes a la OCDE. Para estas categorías geográficas, excepto las dos últimas, los índices también se ofrecen con periodicidad anual.
- Índices por grupos de utilización (presentados también con periodicidad trimestral y anual), índices por grupos en el marco input-output, índices por CNPA-96 y por grandes sectores industriales.

Las series mensuales enlazadas de IVU de exportaciones y de importaciones están disponibles en la Base de Datos de Series de Indicadores de Coyuntura Económica (BDSICE) del Ministerio de Economía y Hacienda.

Tal y como se introdujo al comenzar este epígrafe, cabe destacar que en la actualidad también existen a escala nacional otro tipo de deflatores del comercio exterior. Se trata de los índices de Precios de exportación e importación de productos

industriales publicados por primera vez en España en el mes de noviembre de 2006. El organismo responsable de esta publicación, que continúa realizándose con periodicidad mensual, es el Instituto Nacional de Estadística. Los índices de Precios de exportación miden la evolución mensual de los precios de los productos industriales vendidos en el mercado exterior, mientras que los índices de importación miden la evolución mensual de los precios de los productos industriales procedentes del resto del mundo. El INE destaca que los principales usos de estos indicadores son los siguientes: utilización directa como indicadores para el análisis coyuntural de la actividad económica ligada al comercio exterior, y utilización indirecta como deflatores en las estadísticas de comercio exterior y la contabilidad nacional.

Se trata de índices de precios *puros* tipo Laspeyres con ponderaciones fijas, siendo el periodo base el año 2005, obtenidos a partir de la encuesta continua de periodicidad mensual de más de unos 9.100 establecimientos, correspondientes a más de 7.000 empresas, distribuidos por todo el territorio español y que realizan transacciones en el mercado internacional. Dichos establecimientos representan más del 80% de las transacciones efectuadas, tanto de importaciones como de exportaciones.

La selección de la cesta de productos representativos se realizó en base a su importancia en los flujos comerciales, intentando alcanzar la mayor cobertura posible para cada actividad industrial. Como resultado final se obtuvo una cesta cuyos productos representan el 97% de las importaciones totales y el 94% de las exportaciones. Las casi 200 actividades industriales que integran los índices suponen más del 80% del total, tanto en exportaciones como en importaciones. Las ponderaciones de las ramas y de los productos se obtienen en base a la importancia relativa de las exportaciones e importaciones en el año 2005.

Por último, mencionar que las series ofrecidas se remontan al mes de enero de 2001, siendo los niveles de agregación para los que estos índices son publicados los siguientes: total de exportaciones de importaciones, bienes de consumo, bienes de consumo duradero, bienes de consumo no duradero, bienes de quipo, bienes intermedios, energía.

Conocida la situación de los deflatores nacionales del comercio exterior, cabe destacar que en el ámbito regional español son muy pocas las Comunidades Autónomas que disponen de sus propios deflatores o que trabajan actualmente en la construcción de los mismos. Esto supone una considerable limitación dado que la utilización por parte de las Comunidades de los índices nacionales para deflactar los flujos regionales del comercio exterior puede llevar en muchos casos a aportaciones de la demanda externa neta al crecimiento del PIB regional bastante discordantes con el momento económico. Este es el caso de Galicia, Andalucía, Castilla-La Mancha, Murcia y el País Vasco, Comunidades que disponen de un sistema propio de índices de valor unitario elaborado por los correspondientes Institutos de Estadística. Sus metodologías siguen las pautas implantadas a nivel

nacional, con las particularidades propias de los datos y de las economías regionales, lo que posibilita llevar a cabo una adecuada comparación de la evolución real de los flujos internacionales de las distintas áreas geográficas.

## Bibliografía

- AGUADO SÁNCHEZ, M. J. (1998): “Los nuevos índices de valor unitario base 1995”. *Síntesis de Indicadores Económicos*, Abril XVII-XXVIII. Madrid. Dirección General de Previsión y Coyuntura. Ministerio de Economía y Hacienda.
- CABETAS HERNÁNDEZ, M. y MARTÍN PLIEGO, J. V. (1981): “Comentarios sobre índices de comercio exterior aplicados a España”. *Boletín Económico de Información Comercial Española*, nº 1792.
- CANCELO DE LA TORRE, J. R. y SEQUEIROS TIZÓN, J. G. (2000): *Comercio exterior de Galicia. Índices de valor unitario. Metodología e series históricas*. Instituto Galego de Estatística. Xunta de Galicia. Santiago de Compostela.
- FEITO, J. L. y MARAVALL, F. (1980): “Índices de valores unitarios del comercio exterior español”. *Información Comercial Española*, nº 568, (diciembre), 67-76. Secretaría General Técnica. Ministerio de Economía y Comercio. Madrid.
- FERREIRO CHAO, A. (1984): *Extensión retrospectiva de la actual serie de valores unitarios del comercio exterior*. Secretaría General de Comercio, (mayo).
- GUTIÉRREZ CANTÓ, P. (1984): *Presentación de los índices de comercio exterior*. Madrid. Banco Hispano Americano. Servicio de Estudios.
- INSTITUTO GALEGO DE ESTADÍSTICA. (2000): *Metodología e índices mensuales de valor unitario de Galicia, 1993 a 1998*. Santiago de Compostela. Xunta de Galicia.
- (2004): *Índices de valor Unitario Base 2000. Metodología e primeiros resultados*. Santiago de Compostela. Xunta de Galicia.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (1950-1977): *Boletín de Estadística* Madrid.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (1958): *Comercio exterior de España. Números índices (1901-1956)*. Madrid.
- (1976): *Comercio exterior de España. Números Índices (1963=100)*. Madrid.
- MARTÍN BOURGÓN, F. (1984): *Análisis estadístico del sector exterior. Los productos exportados e importados y los índices de valor unitario*. Documento interno ES/1984/2. Banco de España. Servicio de Estudios. Madrid
- (1986): *Índices anuales de valor unitario de las exportaciones: 1972-1980*. Banco de España. Servicio de Estudios, 8606. Madrid
- MINISTERIO DE COMERCIO Y TURISMO. ESPAÑA. (1980): “Índices de valores unitarios del comercio exterior”. *Boletín Económico de Información Comercial Española*, nº 1729, (mayo).
- MINISTERIO DE COMERCIO. ESPAÑA. (1981): “Índices de valores unitarios del comercio exterior para 1980”. *Boletín Económico de Información Comercial Española*, nº 1783, (junio).

- (1982): “Comentarios sobre índices de comercio exterior aplicados a España”. *Boletín Económico de Información Comercial Española*, nº 1792, (agosto).
- MINISTERIO DE ECONOMÍA. ESPAÑA. (2001): *Metodología e índices mensuales de valor unitario de comercio exterior. Base 1995*. Dirección General de Política Económica, Secretaría de Estado de Economía, de La Energía y de La Pequeña y Mediana Empresa, Madrid.
- MINISTERIO DE ECONOMÍA Y HACIENDA. ESPAÑA. (1989): “La nueva clasificación por productos del comercio exterior y los índices de precios (valores unitarios)”. *Síntesis Mensual de Indicadores Económicos*, (noviembre). Dirección General de Previsión y Coyuntura, Madrid.
- (1991): *Índices de valores unitarios de comercio exterior. Años 1988-1989-1990*. Dirección General de Aduanas e Impuestos Especiales, Madrid.
  - (1995): “Nuevo sistema de índices de valor unitario para el comercio exterior”. *Síntesis de Indicadores Económicos*, (mayo), vol. XVII-XLII. Dirección General de Previsión y Coyuntura, Madrid.
  - (1996): *Series de los nuevos índices de valor unitario de importaciones y exportaciones. (Segunda versión)*. Documento de Trabajo, (marzo). Dirección General de Previsión y Coyuntura, Madrid.
  - (1997): “Nota sobre los índices de precios del comercio exterior”, en *Síntesis de Indicadores Económicos*, (febrero). Dirección General de Previsión y Coyuntura, Madrid.
  - (2005): *Principales novedades de los índices de valor unitario del comercio exterior base 2000*. Dirección General de política Económica, Subdirección de Análisis Macroeconómico, Madrid.
- MINISTERIO DE TRABAJO, SANIDAD Y PREVISIÓN. (1936): *Boletín Mensual*. Madrid.
- MORAL PAJARES, E; DÁVILA VARGAS-MACHUCA, M. A. y MARTÍN MESA, E. (1999): *Los índices de valor unitario para medir el comercio exterior de Andalucía en términos reales*. Sevilla. Instituto de Estadística de Andalucía.
- PRADOS DE LA ESCOSURA, L. (1982): “Comercio exterior y crecimiento económico en España, 1826-1913. Tendencias a largo plazo”. *Estudios de Historia Económica*, nº 7, Servicio de Estudios del Banco de España..
- (1986): “Una serie anual del comercio exterior español, 1821-1913”. *Revista de Historia Económica*, vol. 4, nº 1, 103-150.
- RIOBÓO LESTÓN, I. (2008): “Metodología para la elaboración de los índices de valor unitario: Una aplicación al comercio exterior de Castilla-La Mancha”. *Estudios de Economía Aplicada*, vol. 26, núm. 1.
- SEQUEIROS TIZÓN, J. G. y FERNÁNDEZ REDONDO, M. (2003): “Comercio exterior. Algunos aspectos del comercio exterior en España en el muy largo plazo: 1859 a 2000”. *Papeles de Trabajo del Instituto de Estudios Económicos de Galicia Pedro Barrié de la Maza*, nº 68. A Coruña.

## CAPÍTULO 23

# Programación matemática: Aspectos históricos

G. RUIZ-GARZÓN  
M. ARANA-JIMÉNEZ  
Universidad de Cádiz

### Resumen

El objetivo de este trabajo es efectuar un recorrido por la historia de la Programación Matemática y reflejar los aspectos históricos del desarrollo de esta rama de la Investigación Operativa y de sus artífices.

Mostraremos así la génesis del método de los multiplicadores de Lagrange, que en sus comienzos estuvo ligado a la búsqueda de un estado de equilibrio estable en un sistema mecánico y a los esfuerzos desarrollados por Lagrange o Fourier.

La importancia de las soluciones no negativas de un conjunto de desigualdades y ecuaciones no fue tan evidente hasta el desarrollo de la programación matemática lineal. Nos ocuparemos de los llamados teoremas de la Alternativa que juegan un importante papel a la hora de obtener dichas soluciones no negativas y de las condiciones necesarias de optimalidad.

Repasaremos los esfuerzos de Karush, John, Kuhn y Tucker para conseguir condiciones de optimalidad para problemas de programación no lineales.

Indagaremos en los inicios de la Programación Matemática, del método del Simplex y de la Investigación Operativa, materias muy relacionadas con la resolución de problemas militares.

Acabaremos haciendo un recorrido por las distintas definiciones de funciones convexas generalizadas que han ido apareciendo a lo largo del siglo pasado.

## La condición de Lagrange y otros antecedentes mecánicos

**Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) nace en Turín en 1736, pero con familia de ascendencia francesa. Las dificultades financieras derivadas de los negocios de su padre le llevan a decantarse por el estudio de las Matemáticas. En sus palabras: “*Si hubiera sido rico no me hubiera dedicado a las Matemáticas*”. Era el más pequeño de 11 hermanos. Ejerció de profesor en la Escuela de Artillería de Turín. Entre 1766 y 1787 trabajó en la Academia de Berlín, donde dirigió la sección de Matemáticas, tras la marcha de Euler a S. Petersburgo. En 1787 acepta la oferta de incorporarse a la Academia de Ciencias de París. Miembro de la Comisión de Pesas y Medidas, sus aportaciones fundamentales van desde la mecánica celeste, el análisis (las ecuaciones diferenciales y elípticas), el álgebra y la aritmética. Será nombrado senador por Napoleón hasta su muerte.

En 1788 Joseph-Louis Lagrange, con sólo 19 años, en su libro “*Mecanique Analytique*” incluye el método para calcular los extremos de funciones sujeto a restricciones en igualdad.

Lo describe como una herramienta para encontrar un estado de equilibrio estable de un sistema mecánico.

**Teorema.** Si  $\vartheta(x)$  denota la función potencial y sea el problema de

$$\text{Min } \vartheta(x)$$

$$\text{s.a } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \Lambda, m$$

la condición necesaria del Lagrangiano  $L(x, \lambda) = \vartheta(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$  para alcanzar el equilibrio del sistema establece que en el punto mínimo  $x$ , es donde el gradiente de  $\vartheta(x)$  pueda ser expresado como una combinación lineal de los gradientes de  $g_i(x)$ .

$$\nabla \vartheta(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

Los factores  $\lambda_i$  que forman la combinación lineal de estos gradientes son llamados los multiplicadores de Lagrange.

Se observa fácilmente que los óptimos del Lagrangiano coinciden con los óptimos de la función objetivo.

La “*Mecanique Analytique*” fue aprobada para su publicación por un comité de la Academia de Ciencias formada por Laplace, Legendre y Condorcet, entre otros. En esta obra transforma la mecánica en una rama del análisis matemático. En el prólogo escribe:

“*Que nadie busque figuras en esta obra. Los métodos que se expondrán no requieren ni construcciones mecánicas ni geométricas, sólo operaciones algebraicas, tratadas en un curso regular*”.

**Jean-Baptiste-Joseph Fourier** (1768-1830), a diferencia de Lagrange, estudió el problema de restricciones en desigualdad (CMP)

$$\text{Min } \vartheta(x)$$

$$\text{s.a } g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \Lambda, m$$

Fourier fue el primero en formalizar un problema como un problema de programación matemática lineal y formula el principio de desigualdad para el equilibrio mecánico. Trabaja con la búsqueda de una solución de desigualdades lineales en “*Solution d’une question particulière du calcul des inégalités*” en el Nouveau Bulletin des Sciences par la Société de Paris, 1826, 99-100.

Según Fourier: “*La suma de los momentos de las fuerzas aplicadas es positiva para todos sus desplazamientos, pero es imposible desplazar un cuerpo sólido que está en equilibrio de tal manera que el momento total de las fuerzas aplicadas sea negativo*”

El momento de las fuerzas P,Q,R,... que actúan en un sistemas mecánico está definido como la suma de los productos escalares

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots$$

donde  $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$  son las variaciones de los desplazamientos. El principio de Bernoulli declara que tal suma debe ser cero, mientras que el principio de Fourier afirma que dicha suma de productos es menor o igual a cero en caso de equilibrio.

Si el potencial  $\vartheta$  existe, entonces

$$P = -\frac{\partial \vartheta}{\partial p}, \quad Q = -\frac{\partial \vartheta}{\partial q}, \quad R = -\frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \dots$$

Y el momento de las fuerzas queda como

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \vartheta}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \delta r + \dots \geq 0$$

**Teorema.** *Si un sistema mecánico está en equilibrio estable entonces el potencial tiene un mínimo local y se observa que total diferencial es no negativo en el punto mínimo de la función.*

Cuentan que Fourier con 14 años entendía perfectamente libros avanzados de álgebra y geometría y obtuvo matrícula de honor en el examen de Matemáticas. Al acabar sus estudios secundarios, mostró su ferviente deseo de ingresar en el cuerpo de ingenieros, pero las autoridades militares le negaron reiteradamente la entrada al no pertenecer a la nobleza. Fourier quiso entonces prepararse para ingresar como novicio en una abadía. Pero con la llegada de la Revolución cambió de planes. Tras apoyar a una de las facciones es encarcelado, para posteriormente ser excarcelado tras la ejecución de Robespierre.

Aceptó el puesto de profesor en su antiguo colegio y en él permaneció hasta 1794. En 1789 fue seleccionado para ser uno de los alumnos de la Escuela Normal gracias a un trabajo de álgebra que presentó a la Real Academia. Gaspard Monge se dará cuenta enseguida de su valía y le nombra asistente en la Escuela Politécnica. También Monge escogerá a Fourier para que le acompañe en la expedición de Napoleón a Egipto. A su vuelta acepta a regañadientes un cargo administrativo que le ofrece Napoleón, cargo que le permite comenzar con sus investigaciones sobre la difusión del calor entre dos cuerpos donde aplicaría, para resolver las ecuaciones diferenciables, sus desarrollos de una función en serie trigonométrica. En 1817 ingresará en la Academia de Ciencias, y en 1822 será elegido secretario perpetuo de esta institución.

La condición necesaria establecida por Fourier y comparable a la estudiada por Lagrange, establece que el gradiente de  $f(x)$  puede ser expresado como una combinación lineal no negativa de los gradientes de  $g_i(x)$ .

## Teoremas de la Alternativa

La importancia de las soluciones no negativas de un conjunto de desigualdades y ecuaciones no fue tan evidente hasta el desarrollo de la programación matemática lineal. Los llamados teoremas de la Alternativa juegan un importante papel a la hora de obtener dichas soluciones no negativas y condiciones necesarias de optimalidad.

Estos teoremas de la Alternativa envuelven dos sistemas de ecuaciones lineales, que podemos denotar por I y II. Un típico Teorema de la Alternativa asegura que o el sistema I tiene solución o es el sistema II el que tiene solución, pero nunca ambos a la vez.

Es importante, en tal sentido, el trabajo del matemático alemán **Paul Gordan** (1837-1912) estableciendo en 1873 el primer Teorema de la Alternativa.

**Teorema de la Alternativa (Gordan).** *Para cada matriz dada  $A$ , o*

*I  $Ax > 0$  tiene una solución  $x$*

*ó*

*II  $A'y = 0, y \geq 0$  tiene una solución  $y$*

*pero nunca ambos.*

Paul Gordan fue hijo de un comerciante. Su carrera universitaria se inicia en su ciudad natal, Breslau. Completó estudios con Jacobi en Königsberg y con Riemann en Göttingen. Fue profesor de la Universidad de Erlangen donde se dedicó fundamentalmente al estudio de invariantes algebraicos. Tuvo como única estudiante doctoral a Emmy Noether.

## Condiciones de optimalidad

En 1939 **William Karush** lee la tesis en la Universidad de Chicago bajo el título de “*Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions*”. En ella se establecen las condiciones de optimalidad para problemas de programación no lineales. El principal propósito del trabajo de Karush era conseguir condiciones necesarias para la existencia de un mínimo o máximo. Posteriormente, en 1951, Kuhn y Tucker llegarían al mismo resultado. El trabajo de Karush no fue publicado.

El trabajo de **Fritz John** (1910-1994) publicado en 1948 en un artículo titulado “*Extremum problems with Inequalities as Subsidiary Conditions*”, tenía como objetivo extraer resultados sobre conjuntos convexos. Fritz John obtiene el mismo resultado dos años antes que Kuhn y Tucker e incluso intenta publicarlo en la revista *Duke Mathematics Journal*, pero el artículo es rechazado. Otra diferencia es la introducción por parte de Karush de la condición de normalidad, condición que sería llamada de cualificación de restricciones por Kuhn y Tucker.

**Teorema (Condiciones necesarias de Fritz John).** *Sea  $\vartheta: C \subseteq R^n \rightarrow R$  una función diferenciable sobre un conjunto abierto y convexo  $C$ . Si  $\bar{x}$  es solución del problema de programación no lineal con restricciones (CMP) siendo las  $g_i$  diferenciables, entonces existen escalares  $\lambda_0$  y  $\lambda_i$  tal que*

$$\lambda_0 \nabla \vartheta(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \quad (\text{I})$$

$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{II})$$

$$\lambda_0, \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, K, m \quad (\text{III})$$

$$(\lambda_0, \lambda) \neq (0, 0) \quad (\text{IV})$$

Cuando  $\lambda_0 = 0$  las condiciones de Fritz John no nos sirven en la práctica para localizar un punto óptimo, ya que no nos permite utilizar la información que nos proporciona el gradiente de la función objetivo. Las condiciones que nos garantizan que ese multiplicador es mayor que cero se conocen como de cualificación de restricciones.

La condición (I) puede expresarse diciendo que el gradiente de la función lagrangiana en el óptimo es igual al vector nulo.

La condición (II) indica que si el multiplicador para la restricción  $i$  es no nulo entonces la restricción tiene que ser saturada.

John era un estudiante de Richard Courant en Göttingen, doctorándose en 1933. Al ser judío, John se vio obligado a trabajar fuera de Alemania. Pasa por Cambridge y por la Universidad de Kentucky, donde trabaja hasta 1943. Después ocupará el puesto en el Ballistic Research Laboratory en Aberdeen Proving Ground y finalmente recalará en la Universidad de Nueva York.

En 1951, Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker establecen en un artículo “*Nonlinear Programming*”, las bases del estudio los problemas de programación no lineal. El Teorema de dualidad de programación matemática lineal que relaciona la solución de los problemas primal y dual fue probado por primera vez por David Gale, Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker en 1951 usando un teorema demostrado en 1902 por Gyula Farkas.

**Albert W. Tucker** nació en Canadá en 1905 y muere en Princeton en 1995. Se licenció en Matemáticas por la universidad de Toronto y en 1928 comenzó sus estudios en Princeton, llegando a ser director del Departamento de esta universidad entre 1953-1963. El tuvo enorme influencia sobre sus alumnos, estando considerado un buen profesor y maestro.

**Harold W. Kuhn** nace veinte años después que Tucker en California. Se licencia en 1947 en el Instituto de Tecnología de California y leerá su tesis en Princeton en 1950. Después de una pequeña estancia en el Bryn Mawr Collage, regresa a Princeton de profesor asociado.

Las famosas condiciones que llevan sus nombres, se pueden formular como:

**Teorema (Condiciones necesarias de Kuhn-Tucker).** Sea  $\vartheta: C \subseteq R^n \rightarrow R$  una función diferenciable sobre un conjunto abierto y convexo  $C$ . Si  $\bar{x}$  es solución del problema de programación no lineal con restricciones (CMP) siendo las  $g_i$  diferenciables y si se verifica una condición de cualificación de restricciones, entonces existen escalares  $\lambda_i$  tal que

$$\nabla \vartheta(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, K, m$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, K, m$$

## Programación Matemática e Investigación Operativa

El algoritmo del simplex fue inventado en el verano de 1947 por **George B. Dantzig** (1914-2005), como un procedimiento para resolver *problemas de programación lineal*

*Min*  $cx$

*s.a.*

$$Ax = b, \quad x \geq 0$$

Donde  $c$  es un vector ( $1 \times n$ ),  $x$  es un vector columna ( $n \times 1$ ),  $A$  es una matriz ( $m \times n$ ) y  $b$  es un vector columna ( $m \times 1$ ).

El algoritmo parte de una solución básica factible y entonces busca un número finito de otras soluciones básicas factibles hasta encontrar una que satisface las condiciones de optimalidad. El método del simplex es considerado uno de los 10 mejores algoritmos del siglo XX. Dantzig se dio cuenta que muchos problemas relacionados con transporte de materiales de diversas fuentes a diversos destinos o la producción de bienes para satisfacer una demanda se podría formular en forma de un problema de programación lineal. Los trabajos en los que se inspiró Dantzig para formular su algoritmo fueron el modelo Input-Output de la Economía de Leontief y un trabajo de 1928 de von Neumann sobre Teoría de Juegos.

Dantzig era hijo de dos profesores de matemáticas rusos que habían estudiado en Francia. Estudió en la Universidad de Maryland donde su padre enseñaba. Participaba junto a su padre y a dos compañeros del mismo en la resolución de problemas que los tres matemáticos adultos llegaban a plantear. Desilusionado por lo abstracto de muchas de las partes de la Estadística, decide trasladarse a Berkeley para trabajar bajo la supervisión de Neyman. La tesis de Dantzig fue uno de los dos problemas que Neyman dejó propuestos como tarea para casa y que Dantzig resolvió. Uno de los resultados aseguraba la existencia de multiplicadores de Lagrange para problemas lineales semi-infinitos para variables enteras. Durante la Segunda Guerra Mundial se une a la Fuerza Aérea como civil. De 1941 a 1946 fue el Director de la Combat Analysis Branco, USAF Headquarters Statistical Control. En 1946 rechaza volver a Berkeley y es nombrado Supervisor Matemático el Departamento de Defensa.

Llegó a ser un experto sobre métodos de planificación resueltos con calculadora. Esto era conocido como “*programación*” atendiendo al término militar que se refería a planificar secuencias de entrenamientos, paradas logísticas o despliegues de hombres. Dantzig se enfrentaba a problemas de asignar 70 hombres a 70 trabajos. El término “*programación lineal*” fue sugerido a Dantzig por el economista Tjalling C. Koopmans en una visita que hizo a la RAND Corporation en el verano de 1948. Éste junto con el matemático ruso Leonid Kantorovich ganarían el premio Nobel de economía por sus contribuciones a la teoría óptima de localización de fuentes.

En 1960 acepta un puesto de profesor en Berkeley. Posteriormente se traslada a Stanford, al “tener un aparcamiento de coches en la misma puerta del departamento”, con tan mala pata que este aparcamiento desapareció cuando él se incorporó definitivamente.

Fue el creador también de la programación estocástica o de la programación bajo incertidumbre. Murió el 13 de mayo de 2005 en Palo Alto (California) de un problema diabético complicado con un problema vascular.

El término “*Programación Matemática*” es debido a Robert Dorfman de Havard que lo acuñó en 1949 ya que el término programación lineal le parecía demasiado restrictivo.

El término “*Investigación Operativa*” se debe a A. P. Rowe quien estaba al mando de la Bawdsey Research Station, que la RAF británica estableció en Suffolk para desarrollar el radar para interceptar los ataques de la aviación enemiga. En 1939, estos equipos forman la Operational Research Section. Nace así, en el seno del Estado Mayor Inglés, el primer equipo de investigación operativa estaba formado por 3 biólogos, 2 matemáticos, un astrofísico y un militar. Se ocupaban de otros problemas que se llamaron de Investigación de Operaciones o de Investigación Operativa, que trataban de mejorar la eficacia tanto de armas como de su modo de empleo, en especial, el despliegue de los radares de vigilancia. El carácter aleatorio de los ataques junto con las distintas posibilidades en el aspecto y el tiempo, unido a la variable probabilística de la detección de los radares, trasladaban la resolución a un problema con planteamiento matemático.

En 1942 se inició un análisis estadístico de los resultados de los ataques a convoyes aliados por submarinos alemanes. Tras descartar varios factores secundarios, consideraron los siguientes:

$m$ = número medio de mercantes del convoy

$s$ = número medio de submarinos atacantes

$e$ = número medio de buques de guerra de escolta

El resultado del combate dependía de:

$h$ = número medio de mercantes hundidos

En la siguiente tabla se aprecia que el número  $h$  medio de mercantes hundidos en un ataque es independiente del número  $m$ , de mercantes del convoy

<b>N. de ataques</b>	8	11	13	7
<b>m</b>	20	30	39	48
<b>s</b>	7	5	6	5
<b>e</b>	7	7	6	7
<b>h</b>	8	6	6	5

Como consecuencia de estos datos estadísticos pudo decirse que el promedio de barcos hundidos para un convoy grande es el mismo que para un convoy pequeño; luego el porcentaje de barcos hundidos de un convoy grande es menor que para un convoy pequeño.

Se llegó a que el tanto por ciento  $r$  de mercantes hundidos podía considerarse dado por la relación

$$r = \frac{\lambda}{me}$$

donde  $\lambda$  es una constante experimental.

Luego de acuerdo con esa relación si se duplica el número de barcos mercantes y al mismo tiempo se duplica el número de buques de escolta, se reduce a la cuarta parte el número de pérdidas. El Alto Mando aliado decidió aumentar la extensión de los convoyes en el Atlántico Norte, con lo que se incrementó de tal modo la tasa de cambio, que los alemanes juzgaron poco conveniente continuar atacando convoyes en el Atlántico Norte, siendo éste uno de los grandes éxitos de la llamada Batalla del Atlántico.

## El óptimo de una función multiobjetivo

El economista italiano **Vilfredo Pareto** establece en 1906 en su "*Manuale di economia politica*", que en situaciones competitivas, una solución es óptima (eficiente) si la satisfacción de una persona no puede ser mejorada sin rebajar al menos algún otro nivel de satisfacción de la persona. Esto es, no puedes quitar algo a Pedro para pagar a Pablo. En situaciones multiobjetivo, un óptimo de Pareto es una solución factible para el que un crecimiento en el valor de uno de los objetivos sólo puede lograrse a expensas de disminuir el valor en al menos uno de los otros objetivos.

A diferencia de la programación con un único objetivo, en la que puede existir una solución óptima en el sentido de que minimiza la función objetivo, en los

problemas múltiples no necesariamente existe un punto ideal que sea óptimo para todos los objetivos, ya que es común encontrar situaciones representadas por objetivos contrapuestos. Así, la decisión final debe tomarse dentro de un conjunto de decisiones admisibles que reúnan un cierto equilibrio entre los objetivos que se consideran.

También en su “*Curso de Economía Política*” recoge material estadístico con el fin de formular, en base a documentos irrefutables, una doctrina de la distribución de los ingresos. Demuestra que la distribución de los ingresos se ajusta a la ley que lleva su nombre.

## Convexidad generalizada

En 1905 aparece por primera vez el concepto de función convexa en un artículo de **Johan Ludvig William Jensen** (1859-1925). Éste fue un empleado de la Compañía danesa de teléfonos que en sus ratos libres se dedicaba a las matemáticas.

**Definición.** Una función  $\vartheta: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $C$  es un conjunto convexo, se dice convexa si

$$\vartheta(tx + (1-t)y) \leq t\vartheta(x) + (1-t)\vartheta(y), \quad t \in [0,1]$$

**Definición.** Una función diferenciable  $\vartheta$  se dice convexa si

$$\vartheta(y) - \vartheta(x) \geq \nabla \vartheta(x)(y - x), \quad \forall x, y \in C$$

Una interpretación geométrica de la definición anterior nos dice que una linealización de  $x$  nunca sobreestima  $\vartheta(y)$  para cualquier  $y$ .

La convexidad tiene una gran importancia en la teoría de la optimización ya que asegura validez global a proposiciones que de otra manera sólo se cumplirían de manera local. Para funciones convexas, todo mínimo local es un mínimo global. También me sirve para conseguir condiciones suficientes que son generalmente sólo necesarias, como las conocidas condiciones de Kuhn-Tucker.

Kuhn y Tucker (1951) prueban que:

**Teorema (Condiciones suficientes de Kuhn-Tucker).** Si  $\vartheta$  es diferenciable y convexa y  $g$  es diferenciable y cóncava, y el punto factible  $x$  de un problema de programación matemática para el que existe  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tal que  $(x, \lambda)$  satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker, entonces  $x$  es una solución óptima de (CMP).

En 1954 **Bruno de Finetti** usa el término de función convexa para denotar lo que usualmente llamamos función cóncava. Introduce también las funciones quasi-convexas, clase que contiene a las funciones convexas. La introducción de esta

función viene motivada porque existen funciones como  $\vartheta(x) = x^3$  que no es ni cóncava ni convexa pero que cumple, como las funciones convexas, que los conjuntos de nivel inferiores son convexas.

**Definición.** Una función  $\vartheta : C \subseteq R^n \rightarrow R$  es *quasi convex* si y sólo si para cada dos puntos  $x, y \in C$  y  $\lambda \in [0,1]$  entonces  $\vartheta(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{\vartheta(x), \vartheta(y)\}$

O en el caso diferenciable si para cualesquiera dos puntos

$$\vartheta(x) \leq \vartheta(y) \Rightarrow (x - y)' \nabla \vartheta(x) \leq 0$$

Bruno de Finetti (1906-1985) empieza enrolándose en la Escuela Politécnica de Milán para estudiar ingeniería, la misma carrera que su padre, constructor de ferrocarriles. Al final se decide por dedicarse a las Matemáticas. Trabajó como actuario para una empresa de seguros italiana. A partir de 1946 se dedica exclusivamente a su labor académica en las universidades de Trieste y Roma. Sus ideas de justicia social le llevaron a ser candidato en ciertas elecciones y a ser arrestado por su posición antimilitarista.

Famosa es su frase: “*La probabilidad no existe*”, que hace referencia a su teoría de la probabilidad subjetiva, en el sentido, de que la probabilidad no existe por sí misma, sino que su valor depende del punto de vista del observador. La probabilidad es una medida de la creencia del observador de que un suceso puede acontecer.

Es importante señalar que un punto estacionario, es decir, donde  $\nabla \vartheta(x) = 0$ , de una función quasi convex puede no ser óptimo, como ocurre con  $\vartheta(x) = x^3$ .

Por esta razón **O.L. Mangasarian** introduce en 1965 las funciones pseudo convex, bajo las cuales todos los puntos estacionarios son mínimos globales.

**Definición.** Una función  $\vartheta : C \subseteq R^n \rightarrow R$  es *pseudoconvex* si y sólo si para cada dos puntos  $x, y \in C$  tenemos que  $(x - y)' \nabla \vartheta(y) \geq 0 \Rightarrow \vartheta(x) \geq \vartheta(y)$ .

Mangasarian extendió las condiciones suficientes de Kuhn y Tucker a las funciones pseudoconvexas.

A **S. Karamardian** se le debe el haber abierto la puerta del estudio de la monotonicidad generalizada y sus relaciones con la convexidad generalizada a través del siguiente teorema dado en 1969:

**Teorema.** Sea  $\vartheta : C \subseteq R^n \rightarrow R$  una función diferenciable sobre un conjunto abierto y convexo  $C$ . Entonces  $\vartheta$  es convexa sobre  $C$  si y sólo si  $\nabla \vartheta$  es monótono.

**Definición.** Donde una función  $F : C \subseteq R^n \rightarrow R^n$  es *monótona* sobre  $C$  si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in C$  tenemos que  $(x - y)' (F(x) - F(y)) \geq 0$ .

En 1970, **R. Tyrrell Rockafeller** escribe el libro titulado “*Convex Analysis*”, basado en los apuntes de clase del autor y del también profesor Werner Fenchel, que visitó Princeton en 1951 para impartir un curso sobre “*Convex Cones, Sets and Functions*”. En este libro se presentan el estudio de máximos y mínimos de funciones convexas sobre conjuntos convexas, multiplicadores de Lagrange, teoremas mínimax, etc.

En 1980 **M.A. Hanson** introduce las funciones invex. Hanson se da cuenta que las condiciones de convexidad que aparecen en las condiciones suficientes de Kuhn-Tucker para los problemas de programación pueden ser debilitadas. Así, sustituyó el término lineal  $(x-y)$  que aparece en la definición de las funciones convexas, pseudo convexas y cuasi convexas, por una función vector valuada  $\eta: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  llamada función “kernel”.

**Definición.** Una función diferenciable  $\vartheta$  se dice invex si existe una función  $\eta: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  tal que

$$\vartheta(y) - \vartheta(x) \geq \nabla \vartheta(x) \eta(y, x), \quad \forall x, y \in C$$

La clase de las funciones invex es la clase de funciones que queda caracterizada porque todo punto estacionario es un mínimo global.

## Bibliografía

- GRATTAN-GUINNESS, I. (1970): “Joseph Fourier’s Anticipation of Linear Programming”. *Operational Research Quartely* (1970-1977), 21 (3), 361-364.
- HANSON, M. A. (1981): “On Sufficiency of Kuhn-Tucker Conditions”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol 80, 545-550.
- LAGRANGE, J. L. (1853): *Mécanique Analytique*. Ed. Mallet-Bachelier, París.
- MANGASARIAN, O. L. (1969): *Nonlinear Programming*. Ed. MacGraw-Hill, London.
- McCLOSKEY, J. F. (1987): “The beginnings of Operations Research: 1934-1941”. *Operations Research*, 35 (1), 143-152.
- (1987): “British Operational Research in World War II”. *Operations Research*, 35 (3), 453-469.
- RUIZ-GARZÓN, G. (2007): *Protagonistas de la Estadística (Una Historia de la Estadística en Cómic)*. Ed. Septem, Oviedo, Spain.

## CAPÍTULO 24

# La prueba de hipótesis: Las tendencias de Fisher y Neyman–Pearson

CRISTINA SÁNCHEZ FIGUEROA  
PEDRO CORTIÑAS VÁZQUEZ  
IÑIGO TEJERA MARTÍN  
UNED. Madrid

El objetivo de este trabajo es conocer el origen de la prueba de hipótesis, así como su evolución y formulación. Para ello se analizan los fundamentos teóricos de la Inferencia Estadística, como método de razonamiento inductivo que da un nuevo sentido al procesamiento de datos e intenta medir su grado de incertidumbre.

La Inferencia Estadística tiene como principal objetivo conocer o inferir para una población, o conjunto total, las características obtenidas a partir de una muestra o subconjunto de aquella población. Tradicionalmente los problemas de Inferencia Estadística se dividen en problemas de estimación y en prueba de hipótesis, ambos problemas están relacionados con la Teoría de la decisión y sus cuestiones fueron formalizadas por la Estadística Matemática. La diferencia fundamental entre estos dos problemas está en su orientación. Mientras que en los problemas de estimación el objetivo es determinar el valor de un parámetro desconocido de una determinada distribución, en las prueba de hipótesis se debe decidir si se acepta o rechaza un valor específico de un parámetro desconocido. Es importante señalar que la prueba de hipótesis puede estar relacionada no solo con el parámetro sino con el tipo o la naturaleza de la distribución.

Así, el origen de los estudios, relacionados con la prueba de hipótesis estadísticas, es de 1738, cuando en un ensayo escrito por Daniel Bernoulli aparece que calculó una estadística de prueba para ensayar su hipótesis en el campo de la astronomía. Será entre 1915 y 1933 cuando se desarrolle esta formulación gracias a los estudios realizados por tres grandes autores: Ronald Fisher, Jerzy Neyman y Egon Pearson. Así, desde 1930, fecha en que aparecieron los trabajos de de Neyman-Pearson, la teoría de los tests de hipótesis fue dominada por el paradigma de la decisión. Esto ha llevado al estado actual en el cual *predomina la teoría de Neyman-Pearson* como modelo ó esquema de razonamiento para la toma decisiones, pero la estadística práctica en la investigación, aplicando los mismos procedimientos, interpreta los datos como evidencia para validar teorías.

## Antecedentes

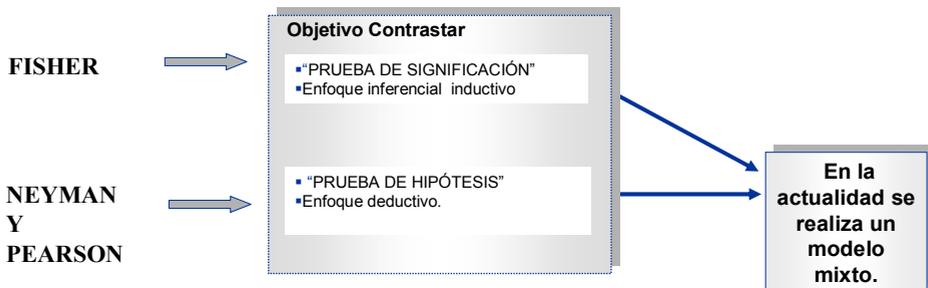
Es difícil que en estos momentos los investigadores, que llevan a cabo análisis de datos, no sepan qué es la prueba de hipótesis estadísticas, pues se ha convertido en un elemento esencial de muchas disciplinas e investigaciones. No solo porque permiten obtener conclusiones, sino porque aportan validez al análisis realizado. La Inferencia Estadística tiene como principal objetivo conocer o inferir para una población, o conjunto total, las características obtenidas a partir de una muestra o subconjunto de aquella población. En este caso se analizará la *corriente Clásica de la Inferencia Estadística*, que se apoya en el *concepto frecuentista de probabilidad* obtenida de la información descriptiva muestral. De esta manera, los problemas de Inferencia Estadística se dividen en problemas de estimación y en prueba de hipótesis. En la actualidad cualquier curso básico, de estadística inferencial, incluye en su programa ambos problemas. Los dedica una serie de capítulos en los que enseña métodos y criterios objetivos básicos para la adecuada interpretación de datos, con el objetivo prioritario de que los resultados, que pueden ser obtenidos por un investigador, sean factibles y mantengan una cierta coherencia. En la actualidad, de ambos problemas, la prueba de hipótesis se ha resumido en una secuencia de pasos más o menos generalizados que se siguen de forma ordenada a la hora de realizar un estudio o investigación. Pero a pesar de ello, es importante apuntar que no estamos ante una teoría unificada, sino ante una combinación estudios realizados por diferentes autores de forma separada. Asimismo, el avance de las tecnologías informáticas y de los numerosos programas estadísticos las han puesto al alcance de todos, pero al mismo tiempo se ha producido una desvirtualización de los conocimientos. En estos momentos, el manejo de los paquetes informáticos permite la ejecución de la investigación, sin la necesidad del conocimiento o los conceptos necesarios para su correcta aplicación.

El origen de los estudios, relacionados con la prueba de hipótesis estadísticas, se puede encontrar en investigaciones realizadas por el físico y matemático Daniel Bernoulli, el autor recurre a la estadística para comprobar unas hipótesis en el

campo de la astronomía. Este sería un simple apunte que se desarrollaría más tarde por tres autores: Ronald Fisher, Jerzy Neyman y Egon Pearson. La formulación de hipótesis estadísticas surge ante la necesidad de realizar análisis, con objetividad suficiente en las diferentes decisiones que se tomaban. Los trabajos desarrollados en esta línea, por los tres autores señalados, se agrupan en dos tendencias diferentes: Fisher por un lado y Neyman y Pearson por el otro. Fisher desarrolló su teoría que denominó *Pruebas de Significación* y Neyman y Pearson las llamadas *Prueba de Hipótesis*. La principal diferencia entre estas dos teorías está en que el modelo de Fisher no se acepta la idea de dos hipótesis estadísticas contrapuestas. Es importante señalar que si analizamos la evolución de la prueba de hipótesis estadísticas, podemos decir que el origen de ambas tendencias se encuentra en la prueba Ji al cuadrado de Kart Pearson, pero el paso del tiempo ha generado un modelo mixto que tiene como base las dos teorías.

### Inferencia Estadística:

- Tiene como principal objetivo conocer o inferir para una población, o conjunto total, las características obtenidas a partir de una muestra o subconjunto de aquella población. En este caso se analizará :
  - La corriente Clásica de la Inferencia Estadística, que se apoya en el concepto frecuentista de probabilidad



## Fisher y Las Pruebas de Significación

Ronald Fisher (1890-1962) es considerado uno de los padres de la estadística moderna. Desde niño mostró un gran talento por las matemáticas, pero además desarrolló sus estudios en otras disciplinas como la teoría de la evolución o la genética. Igualmente, fue pionero en la aplicación de métodos estadísticos aplicados al diseño de experimentos científicos.

Fueron numerosas sus aportaciones científicas al campo de la estadística: desarrolló técnicas para obtener mayor cantidad de información útil a partir de

muestras de datos pequeñas con el supuesto de normalidad, técnicas conocidas con el nombre de análisis de la Varianza y Covarianza que tienen grandes aplicaciones dentro de la estadística práctica, la hipótesis nula, los niveles de significación y los pasos fundamentales en el diseño de una investigación. Sus contribuciones a la estadística permitieron que ésta avanzara como disciplina científica, así con sus metodologías la estadística fue punto de apoyo de innumerables campos de aplicación. Aunque son numerosos los trabajos de éste autor, destacamos aquí los que están relacionados con la prueba de hipótesis. Así, En 1925 ve la luz el libro de Fisher "*Statistical Methods for Research Workers*" en él muestra su interés por la *inferencia inductiva*. Crea un método cuantitativo de naturaleza objetiva mediante el cual se podrían obtener conclusiones a partir de observaciones. Con este trabajo, consigue que el contraste de hipótesis sea considerado como uno de los métodos de Inferencia Estadística que puede ser usado en diferentes áreas de conocimiento. El modelo propuesto por Fisher establece una única hipótesis estadística, la hipótesis nula- $H_0$ , y no acepta la idea de dos hipótesis estadísticas contrapuestas. Fisher ideó una manera de medir el grado de incompatibilidad de un conjunto de datos con la hipótesis nula establecida, la evaluará con el valor de "p", y será conocido como los valores "p-value". El término significación (significant) se usaba para indicar que la probabilidad es suficientemente pequeña como para rechazar la hipótesis planteada. De esta manera si el valor de "p" es pequeño existen dos alternativas, o que la realización observada de la estadística de prueba constituye un evento raro o que la hipótesis nula planteada es invalida.

Aunque Fisher no fue el primero en utilizar el 5% para determinar la significación, él sugirió el término "*significativo*", como equivalente a "*significativo al 5%*". El principal inconveniente de este libro es que Fisher no describe de donde proceden estos tests, y nunca dice exactamente que valor "p" puede considerarse significativo. En su lugar presenta ejemplos de cálculos y notas si el resultado es o no significativo.

En otra obra escrita por Fisher en 1965 "*Statistical methods and scientific inference*" escribió: "*Ningún investigador tiene un nivel de significación fijo, al cual año tras año y en toda circunstancia rechaza hipótesis; más bien entrega su mente a cada caso particular a la luz de la evidencia y de sus ideas*"

## **Neyman y Pearson las llamadas *Prueba de hipótesis***

Jerzy Neyman (1894-1981) matemático polaco de origen ruso es considerado, como Fisher, uno de los grandes fundadores de la estadística moderna. Trabajó junto con Egon Pearson en la teoría de prueba de hipótesis, su principal objetivo era conseguir que esta teoría tuviera estructura lógica y rigor matemático. Son numerosos los trabajos desarrollados por Neyman, entre ellos podemos citar: el muestreo de poblaciones finitas, con el determinó que la selección aleatoria es la

base de una teoría científica que permite predecir la validez de las estimaciones muestrales, así también desarrolló trabajos sobre la eficiencia de la estrategia muestral, y usó intervalos de confianza que contendrían el verdadero valor del parámetro estimado considerando una probabilidad dada de equivocarse en la estimación realizada .

Karl Pearson, (1857-1936) es considerado como otro de los grandes precursores de la estadística moderna por contribuciones a la estadística como la prueba ji cuadrado. Fundó la revista especializada en Estadística “*Biométrica*”, y contribuyó a exaltar la influencia de la estadística como una herramienta de gran valor para realizar trabajos científicos. Como persona capaz de generar controversias sobre diversos aspectos, provocó tanto amistades fervorosas como enconadas enemistades. William Gosset fue uno de sus mejores amigos, mientras que Ronald Fisher fue uno de sus peores enemigos. Karl Pearson tenía un hijo, Egon Pearson (1895-1980), que en 1925 inició una perpetua amistad con Jerzy Neyman. Le ayudó a desarrollar teorías con aplicaciones de técnicas estadísticas, teoría de estadística y operaciones de investigación. Junto con Neyman desarrolló en enfoque de prueba de hipótesis, el cual fue duramente objetado por Fisher, pero eventualmente aceptado. Durante la Segunda Guerra Mundial, el joven Pearson trabajó en métodos estadísticos en control de calidad, junto con una nueva disciplina de investigación de operaciones

Entre 1928 y 1933 Jerzy Neyman y Egon Pearson escribieron una serie de documentos que son la base de la llamada *Inferencia Estadística Clásica*, origen de la Estadística Matemática actual, sobre las prueba de hipótesis Para Neyman y Pearson, un contraste estadístico es una regla de comportamiento; un criterio de toma de decisión que nos permite aceptar o rechazar una hipótesis asumiendo ciertos riesgos. La colaboración llevada a cabo entre ambos fue muy productiva, quedando reflejada en documentos como “*El problema de la forma más eficiente las prueba de hipótesis estadísticas*” y “*La prueba estadística de hipótesis en relación a las probabilidades a priori* “. Con estos trabajos se establece una nueva concepción de la prueba de hipótesis, plantean un proceso de decisión de tipo deductivo diseñado a priori sobre la base de los datos, surge el llamado Lema de Neyman-Pearson.

Según esta tendencia deben plantearse dos tipos de hipótesis para decidir sobre una de ellas, la hipótesis nula ya definida en la tendencia de Fisher y la hipótesis alternativa que por regla general suele ser opuesta a la hipótesis nula. Con esta tendencia los trabajos de investigación se transformaban en un problema de decisión, con dos posibles alternativas: con los datos de los que dispone el investigador solo se puede rechazar una hipótesis y por tanto aceptar la otra. De esta forma se establecen dos tipos de error: Error tipo I, que se comete cuando se rechaza una hipótesis nula que es cierta y el Error tipo II, aceptar una hipótesis nula que es falsa. En este enfoque la probabilidad de cometer estos errores se puede calcular con formulas matemáticas de forma objetiva, las probabilidades asociadas

a ambos tipos de errores son  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, lo que nos permitirá establecer la que llamaremos región crítica. De esta forma, si el valor del estadístico de prueba, calculado por el investigador, se sitúa en dicha región se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa.

## Controversia entre Fisher y Neyman-Pearson

La gran controversia entre Fisher y Neyman-Pearson surge ante las diferentes consideraciones realizadas por los autores sobre la prueba de hipótesis y unidas, a su vez, a grandes enemistades surgidas entre ellos que les llevaron mostrar sus respectivas posiciones mucho más enfrentadas ante el gran desafío de mostrar una teoría sobre la prueba de hipótesis. Estas apreciaciones distintas originaron el desarrollo de procedimientos más exactos, pero conjuntamente llevaron a la confusión en ciertos conceptos, que aún hoy subsiste. Fisher consideraba que su manera de someter a prueba la hipótesis nula era absolutamente objetiva y rigurosa y la única forma de inferencia inequívoca. Cuando Jerzy Neyman terminó de pronunciar su discurso de ingreso a la *Royal Statistical Society* en Londres, Fisher comentó sarcásticamente que Neyman debería haber elegido un tema “sobre el cual pudiera hablar con autoridad”. Neyman, por su parte, declaró que los métodos de prueba de Fisher eran “en un sentido matemáticamente especificable, peores que inútiles”. (Aron & Aron, op. cit, pp. 580-581).

- El término "hipótesis nula- $H_0$ ", introducido por Fisher, hace referencia a que es la hipótesis cuya "nulidad" (falsedad) se pretende demostrar, con el objetivo de tomar una de dos decisiones siguientes: o bien la  $H_0$  se rechaza al nivel de significación, o bien el juicio se reserva en ausencia de base suficiente. Por tanto según esta tendencia, las únicas decisiones posibles son rechazar la hipótesis nula o declarar que la evidencia no es suficiente. El trabajo desarrollado por Neyman y Pearson, va orientado más hacia la toma de decisiones, para lo cual introducen algunas modificaciones en el esquema fisheriano. Los autores determinan una hipótesis nula- $H_0$  acompañada de una hipótesis alternativa- $H_1$ , que en realidad es un conjunto de posibles alternativas. Para Fisher al terminar la prueba hipótesis solo tenía como alternativa no rechazar la hipótesis nula pues en este caso la hipótesis nula nunca se acepta. Neyman y Pearson en cambio, incorporaron la idea de simetría entre el rechazo y la confirmación de la hipótesis nula.
- Diferencias entre nivel de significación estadística establecido por Fisher valor de “p”. y Error de tipo I con probabilidad  $\alpha$  de la teoría de Neyman y Pearson. Según Fisher, el nivel de significación estadística equivale a la magnitud del riesgo que está dispuesto a correr el investigador de rechazar una hipótesis nula verdadera, el valor de “p”. Él sugirió el término

“*significativo*”, como equivalente a “*significativo al 5%*”. Suponiendo que se trabaje con un nivel de significación del 5%, se rechazaría la hipótesis nula siempre que la probabilidad de explicar los resultados obtenidos en una investigación sean igual o menor que 5%. En la perspectiva de Neyman y Pearson el nivel de significación solo establece la frecuencia relativa de veces que rechazaríamos la hipótesis nula cierta a la larga (Error Tipo I). Para estos autores a partir del Error tipo II se puede construir la función de potencia  $(1 - \beta)$  en estrecha relación con este tipo de error. En el criterio de Fisher, el valor de “p” se establece *a posteriori*, es decir, sobre la base de los datos; y en el de Neyman y Pearson, los datos se obtienen con una confiabilidad dada *a priori* por los errores  $\alpha$  y  $\beta$ .

### **Conclusión: El método combinado que se utiliza en la actualidad**

La teoría de prueba de significación de Fisher que históricamente apareció primero, fue mezclada con los conceptos de Neyman-Pearson de prueba de hipótesis y enseñada como la estadística *per se*. Le llamamos a esto “teoría híbrida” de la Inferencia Estadística, y esto continúa en nuestros tiempos por el deseo, tanto de la estadística como de otras ciencias, de presentar un modelo de toma de decisiones que sea unificado, mecánico y sin defectos. El contraste estadístico implica una serie de conceptos como Hipótesis nula y alternativa, Errores Tipo I y II, probabilidad de los errores, resultados significativos y no significativos, población y muestra, parámetro y estadístico, distribución de la población y distribución muestral. Algunos de estos conceptos son mal interpretados o confundidos por los estudiantes e investigadores experimentales, más aún en tiempos donde los procedimientos estadísticos son desarrollados por programas informáticos que no tienen en cuenta los conocimientos de los usuarios sino los resultados obtenidos.

Las pruebas de hipótesis bajo este enfoque, es decir tal y como se conocen en la actualidad, calculan el valor “p” y establecen que la diferencia es significativa a este valor sin establecer declaración explícita sobre la hipótesis alternativa. Este valor “p” es parte de la información que aparece en los nuevos programas estadísticos de cómputo. Todas las pruebas de hipótesis descansan en la identificación de un estadístico, que es conocido como el estadístico de la prueba. El valor “p” refleja la posición del valor observado del estadístico en las colas de su distribución si la hipótesis nula-  $H_0$  fuera cierta.

## Bibliografía

- ARON, A. y ARON, E. N. (2001): *Estadística para Psicología*. Buenos Aires: Pearson Education, S.A.
- BORGES DEL ROSAL, A. (1997): *Algunos Problemas Frecuentes En La Interpretación de los Contrastes de Hipótesis Estadísticas en Psicología*. [www.fedap.es/IberPsicologia/iberpsi2-3/borges/borges.htm](http://www.fedap.es/IberPsicologia/iberpsi2-3/borges/borges.htm)
- FISHER, R. A. (1935): *The design of experiments*. Edimburgh: Oliver y Boyd.
- (1956): *Statistical methods and scientific inference*. Edinburgh: Oliver Boyd.
  - (1958): *Statistical methods for research workers*. (13 edition). New York: Hafner.
- GREER, B. (2000): “Controversies around the role of statistical tests in experimental research”. *Mathematical thinking and learning*, 75-98. Número Monográfico sobre Educación Estadística.
- NEYMAN, J. (1950): *First course in probability and statistics*. New York: Henry Holt
- RODRÍGUEZ ARIAS, E. (2006): *Estadística y Sociología: Análisis Histórico de la Inferencia Estadística*. Perspectivas de Psicología.
- SILVA AYCAGUER, L. C., BENAVIDES RODRÍGUEZ, A. YALMENARA BARRIOS, J. (2002): “El Péndulo Bayesiano: Crónica de una Polémica Estadística”. *LLULL*, Vol 25, 109-128.

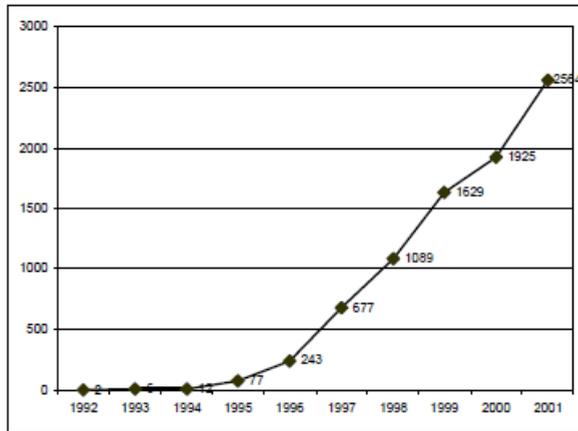
# The introduction of quantification and Biostatistics to the clinical practice – The case of clinical epidemiology and evidence-based medicine

ARIEL L. ZIMMERMAN  
Bar-Ilan University

The success of the term of Evidence-Based Medicine in conquering the medical literature was astonishing. Shortly after its first publication in November 1992 in the JAMA [1] the term attained a meteoric success reaching more than 1000 publication only four years.

Since then Evidence-Based Medicine has become the common name denoting normative and modern medical practice. A census of North American medical schools conducted in the year in 2000 reflects the extraordinary acceptance of the new methods in medical education and found that 88% of medical schools had a dedicated course in Evidence- Based Medicine [2].

## Evidence Based Medicine in the Medical Literature\*



Based in a PubMed search on the string “evidence based”

But despite being a remarkable recent term, the methods of Evidence-Based Medicine were in fact a local version of clinical epidemiology that was developed in the department of clinical epidemiology and biostatistics in McMaster medical school over more than a quarter of century in the direct context of medical education. David Sackett, the central figure in the application of clinical epidemiological methods in McMaster and the undisputable father of will be Evidence-Based Medicine told in a 1979 interview about his reveal of clinical epidemiology. Then as a young doctor in Buffalo, New York.

*“I was thinking that I will finish my training in Medicine and then do a PhD in Biochemistry because I was interested in the Amino Acid transport. But the draft put me in circumstances where I could set up a lab and still do some of that work I was tied. My main job was doing population based studies and high blood pressure and coronary diseases with Warren Winkelstein... and that is where I got interested in the interface between traditional epidemiology or what we call big-E epidemiology and clinical medicine. So I suppose that started the path then that led me here”*

This paper will describe the early history of clinical epidemiology that, as Sackett described, occupied the interface between big E epidemiology and medicine and started to grip the medical discourse in these years. And will concentrate in two early figures that structured the clinical epidemiology methods in Yale medical school, John Rodman Paul and Alvan Feinstein. This paper will not deal directly with David Sackett, the McMaster environment and the construction of Evidence-Based Medicine; however the characteristics of clinical epidemiology, which Evidence-Based Medicine is one of its iterations and its main vehicle of diffusion, are crucial to understand the content and the further history of Evidence-Based Medicine. Moreover, this paper will argue that in difference to the

accepted narrative that describe the incorporation of quantification methods to clinical practice as originating in post revolutionary France by Pierre Lois and later in England by Ronald A Fisher, Major Greenwood and Bradford Hill. Clinical epidemiology was a genuine product of North American medicine reflecting the social atmosphere, epistemological incertitude, methodological problems, and political professional constrains of the interwar and postwar American medicine.

This paper reflects a work in progress; all comments will be warmly received.

### **John Rodman Paul (1893-1971) – The ecology of disease**

The beginnings of descriptive epidemiology and its methods of quantification, surveillance and control has been traced back to social processes in Europe in the first half of the 19th century after the Napoleonic wars. In short, widespread concerns with the causes and patterns of epidemics, linked to poverty and hygiene conditions, led to the development of the first professional civil services and institutions in France, Germany and the United Kingdom. The germ theory of transmission in the late 19th century and the introduction of probabilistic and statistical methods are considered the main milestones in the development of modern Epidemiology [3, 4].

The history of clinical epidemiology had not received the attention and research as its older sister. The first to propose the term of clinical epidemiology was John Rodman Paul (1893-1971), the chairman of the section of Epidemiology and Preventive Medicine at Yale. He coined the term and presented it for the first time in a presidential address given to the American Society for Clinical Investigation in Atlantic City on May 2, 1938. In his presentation also titled "*Clinical Epidemiology*", Paul described the span of the new discipline. "*Clinical Epidemiology is the name I would like to propose for a new science; a new discipline in which this society might take an important part. It is a science concerned with the circumstances, whether they are functional or organic, under which human disease is prone to develop. It is a science concerned with the ecology of human disease*" [5]. Clinical Epidemiology would involve a multi-faceted observation of a disease and take into account environmental factors. Different from what he called the "*orthodox science of epidemiology*" that focused on diseases by observing populations, the clinical epidemiologist would look to the individual patient and his environment, and hunt for the disease culprit. Paul continued - *Clinical Epidemiology differs therefore from the orthodox science of Epidemiology both in its aim, and its locale. . The orthodox epidemiologist must of necessity deal dispassionately with large groups of people. It is the multiplication of observations which give him the results. The clinical epidemiologist, on the other hand, must of necessity deal with small groups of people; people whom he knows well, no larger than a family of a small community. The restriction of the*

*size of the group rest on the fact that clinical judgment cannot be applied wholesale, without the risk of its being spread to thinly to be effective...He [the clinical epidemiologist] starts with the sick individual and cautiously branches out into the setting where that individual became sick – the home, the family and the workshop. He is anxious to analyze the intimate details under which his patient became ill" [5].*

Paul's clinical epidemiology was made by a clinician, for clinicians, with clinical work in mind. It took into account the sensitivities between social and environmental factors and diseases and populations (what he called *medical ecology*) in an attempt to help the individual practitioner treat an individual patient. The clinical epidemiology clinician should develop new tools and strategies that make him neither an epidemiologist, nor a laboratory researcher, but something closer to a sociologist. *"To do this the clinician will, however, have to adopt a new technique, and a new uniform. Gone is the glamorous role of the microbe hunter for this type of investigation and in his place all we can see is something like a rank sociologist".*

These new perspectives on epidemiology and on clinical practice begged questions related to the natures of diseases, disease transmission and the nature of medical knowledge itself. Paul's clinical epidemiology proposed a new medical research methodology and a different kind of medical knowledge that differed from classical methods and laboratory work.

*"The crux of these investigations [Clinical Epidemiology] lies not only in the discovery of new intrinsic or extrinsic factors, which may be found either indoors or outdoors, but in the discovery of new concepts. The concept of certain new etiological forces which lie back of those which were once thought to be basic", " conservative opinion does not allow anything to be really considered as "etiology," unless we can succeed in getting it into a test tube, unless we can precipitate it,-unless we can crystallize it as it were. This is due of course to our current methodology which has, perhaps, become more of a religion than most of us realize. I think it may have led to a slightly narrow interpretation of clinical investigation on our part, for clinical investigation certainly should be given the opportunity to spread".*

The new *ecological* view demanded a different conceptualization of disease. Paul's paper echoing puritan principles and eugenics notions proposed that illness should be seen in its social context as part of a "social justice". Disease is the natural way for the clearance of weak or ill members of society. So in this aspect disease can be seen as a social positive element for the whole population. *"[We may find], for instance, that all disease is not necessarily bad, but that a wise providence inflicts someone with arteriosclerosis or even tuberculosis as a just reward for his "bad living" " [5].*

The 1938 address by Paul in Atlantic City did not attract major interest and the term *clinical epidemiology* remained nearly unheard of outside of Yale. In 1945

Paul start an undergraduate course for medical students called Clinical Epidemiology that he continued to teach until his retirement in 1961. The course became the basis for the first textbook on Clinical Epidemiology published in 1958 [6]. In his textbook Paul explains the nature of the duties of a clinical epidemiologist. The clinical epidemiologist is foremost a practicing physician that works as a *"detective, to discover the truth"* via his astuteness and clinical skills. The use of statistics and mathematical tools are left to the traditional epidemiologist. By developing a relationship with a patient and his environment, the physician is able to trace the cause of a disease within an individual patient, while relying on his understanding rather than using statistical methods.

*"The role of the clinical epidemiologist is like that of a detective visiting the scene of the crime. He starts with the examination of a sick individual and cautiously branches out into the setting where the individual became ill and where the patient may become ill again. In this respect, the clinical epidemiologist stands in relation to the statistical epidemiologist perhaps as gardener does to a farmer. Statistics may validate an analysis made by a clinical epidemiologist by increasing the number of observations, but the clinician has the opportunity to paint a clinical picture and improve the accuracy of a limited number of observations by intimately studying and exacting measurements" [6].*

Paul's new clinical epidemiology opens a series of epistemological and methodological issues. What should be the domain of medical knowledge and how this medical knowledge should be obtained. Paul answers remain vague. He basically dismissed quantification and the use of statistics and mathematical tools, in his mind he saw a practice that would be closer to sociology that collects data on the social conditions and interactions but basically the clinician should use his clinical intuition.

Paul's introspective and critical gaze into medical practice and his awareness that clinical practice needs a special knowledge that cannot be reduced only to the "basic sciences" will be its main contribution that will be followed by later clinical epidemiologists.

While the traditional basic sciences looked for vectors of causation in the laboratory setting, Paul maintained that these basic sciences do not suffice in providing the basis for the clinical work. The clinical practice needed a specific science and method that take into account the social role of disease "the ecology of disease".

The following figure shows Paul's example of a clinical epidemiology investigation as presented in his book. The example clinical problem is a series of episodes of "cold" in a family. Paul clinical epidemiology investigations link the illness to the social changes that the family suffers (rather than an infectious cause). The case is presented in a graph where each line represents one of the family

members over time. The graph is divided in two, before and during the cold outbreak.

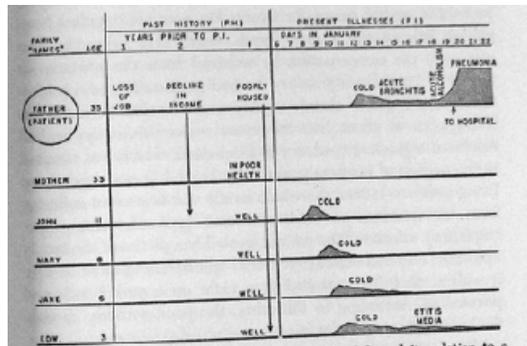


Figure 1 – An example of Paul’s conception of clinical epidemiology work the original caption reads “a case of pneumonia in a 35 year old adult and its relation to preceding events in the life of the patient and the life of his family. The six heavy horizontal lines indicate the six members who comprise the family group. Their ages appear at the left of the diagram. The patient appears on the top line as the male parent of the family”.

Paul’s conclusion is that the series of cold outbreaks are related to the family loss of his “job” and the economic deterioration. The job loss leads to a “decline in income” and to “poor housing” (all are detailed in the upper part of the graph). With the change to poor housing all family members start to develop “cold” episodes, but the one that develop the most severe cold was the family father. Finally it deteriorates to pneumonia and the father dies finalizing the episode of this non-functioning non- productive social unit.

Paul turn a new gaze toward the investigation of the clinical process, his legacy for the further development of clinical epidemiology was the explicit request for a clinical science of clinical method that will not be reduced to basic sciences and will standardize clinical practice. He seeks to the introduction of epidemiological and social data as organic factors in clinical reasoning. In this context the pathophysiology of the family and its economical deterioration was not less important than the infectious vector in explaining the illness.

## Alvan Feinstein (1925-2001) - Clinometrics

The further development of Clinical Epidemiology was carried out by Paul’s student at Yale: Alvan R. Feinstein (1925-2001)<sup>1</sup>. Before entering to the medical

<sup>1</sup> Alvan F Feinstein who was named by Robert Fletcher, the “father of Clinical Epidemiology”, completed a degree in Mathematics before enrolling in medical studies, in Chicago. Later during his residency in Yale he cooperated with Paul and contributed in the second publication (1966) of Paul’s book of “Clinical Epidemiology” [7]. Fletcher, R.H., *Alvan Feinstein, the Father fo*

school at Yale Feinstein studied mathematics. In the medical school he started to work with Paul and help him in the revision of his book "Clinical Epidemiology" which was republished in 1966.

Feinstein endorsed Paul's view of the clinical use of epidemiology data and principles for the treatment of the individual patient and to the standardization of the elements of the clinical encounter. However, in difference with Paul, he saw in quantification and the use of statistical and mathematical concepts, rather than clinician astuteness key elements for the standardization of clinical examination and the rationalization of the medical practice.

In his book *Clinometrics* Feinstein describes how as resident he struggled with the problem of the diagnosis of rheumatic fever. Rheumatic Fever is an inflammatory disease caused by a common Streptococcal infection in genetically susceptible patients. Its diagnosis is clinical and made by the auscultation to hearth sounds and the detection of its sequel of damaged heart valve leaflets. However, this heart auscultation is notoriously difficult to perform and agreement on test results was elusive [8].

The difficulty in the diagnosis of Rheumatic Fever and the difficulties to reach clinical agreement became the model for Feinstein of the problems facing clinicians in pursuit of clinical knowledge. It revealed the basic inaccuracy of clinical observations, clinical diagnosis and the elusiveness of clinical agreement. He wrote, *"This discovery [of disagreement and inconsistencies between different observers] was not surprising, since all clinicians realize that human observers vary greatly in the way they perform and interpret their examinations. What was surprising and disturbing, however, was that we had been taught nothing in medical school or in subsequent training to prepare us for the existence of these variations, for dealing with them, or for anticipating the consequences they might have in clinical science. Throughout centuries of medical education students have almost unquestioningly accepted the word of their teacher as definitive and neither he nor his students ever seemed to discuss the possibility that his latest word might not agree with his previous one or with the word of chiefs elsewhere. Although interpretations made by human observers are the main source of the basic data used in pathology, radiology and clinical activities, the "science" transmitted in medical training usually omitted the problem of testing reliability and standardizing performance to the human examining "apparatus" [9].*

Feinstein solution was the meticulous quantification of auscultation findings in order to provide standardization and accuracy to clinical diagnosis. The case of Rheumatic Fever becomes the model for the further development of clinical epidemiology and the quantification of clinical data. In 1968 Feinstein published a

series of three articles, using Paul's name of *Clinical Epidemiology*. There he expanded Paul's ideas introducing the new methods of quantification of clinical examinations that later he will call *Clinometrics*. He also placed emphasis on the mathematical bases of clinical diagnosis and medical decision and the use of statistics and of Boolean Logic. Paraphrasing Paul's original definition of clinical epidemiology and the ecology of disease, he defines clinical epidemiology as "*the circumstances under which diseases occur, where diseases tend to flourish and where they do not*" [9]. To this basic concept he adds the need to examine the entire spectrum of clinical work including the appraisal of diagnosis and treatment. "*The intellectual activities of this territory [Clinical Epidemiology] include the following: the occurrence rate and geographical distribution of disease; the patterns of natural and post-therapeutic events that constitute varying clinical courses in the diverse spectrum of a disease, and the clinical appraisal of therapeutic agents. The contemplation and investigation of these or allied topics constitute a medical domain that can be called clinical epidemiology*" [10].

Paul saw in illness a natural phenomenon that should be seen in its broader social context (the family cold outbreak as results of unemployment, decrease income and deterioration of housing), Feinstein emphasizes the perspective that disease should be considered an experiment conducted by nature to which we need measuring tools. The basic problem was that clinicians rely in inaccurate tools to measure the clinical observation. The *clinical apparatus* was inaccurate and highly inconsistent.

The doctor's role in interpreting the results and make diagnoses from clinical symptoms was, in fact, impossible. He wrote: "*The problem is insuperable. There is no longer any way to get a valid scientific appraisal of what really happened in disease rates in the past. All we can do is speculate about causes and to perform various types of statistical analyses...*" "...if measurements have larger biases and fluctuating errors, or if many different variables are heavily entangled in the data, the power to elaborate analysis to overcome these deficiencies is feeble" [10].

If there is no standardization of clinical practices to improve interpretation of clinical data and no change in the way that clinical medicine is performed and reported, then communication and comparison is impossible and no amount of statistical analysis, regardless of its sophistication, can be performed. "*Regardless of these speculations and analysis [of advanced statistical methods] the main problem is in the data – statistical analysis cannot turn bad data in good data*" [10].

Feinstein's most characteristic contribution in his series of articles was the use of *Venn Diagrams* in the analysis of epidemiological data of diseases. Figure 2 below illustrates his use of a *Venn Diagram* in the case of a lung cancer diagnosis and what he called the *epidemiologic spectrum of disease*.



introduction of quantification to clinical practice, mainly by Alvan Feinstein, seem to be unrelated, at least in the beginning, to simultaneous development of randomized clinical trials and research methodologies in England in the same years.

Clinical epidemiology was made by clinicians with clinical practice in mind and directed to the treatment of the individual patient. A professional rift separated the work of this early clinical epidemiologist and the work of the population and descriptive epidemiologist (the big E epidemiology as Sackett call them). The critical dimension of Clinical Epidemiology toward existing medical knowledge, practice and institutions had an epistemological and political dimension that went hand in hand with the critics of the social role of and authority of the American medical profession. This new attitude towards the medical profession, that become prominent with the end of the “American medicine golden age” [11] and its impact on the cadres of young physicians was one of the main factors that primed North American medicine circles to the universal acceptance of Evidence-Based Medicine and its new methods.

Alvan Feinstein, the main figure of clinical epidemiology that formulate its quest for the quantification of medical observation and the standardization of clinical practices in the 1960’ had a major influence in the establishment of 1968 Sackett’s department of Clinical Epidemiology and Biostatistics in McMaster and the creation of the methods that will result in Evidence-Based Medicine 23 years later. Feinstein influence culminated by his leaving of Yale for two years in 1970-1972 to join Sackett in the creation of the unit and the medical education program. The clinical epidemiology methods developed there, as well as Feinstein legacy will remain basic elements of Evidence-Based Medicine.

## References

1. *Evidence-based medicine. A new approach to teaching the practice of medicine.* Evidence-Based Medicine Working Group. *Jama*, 1992. 268(17): p. 2420-5.
2. GREEN, M. L., *Evidence-based medicine training in internal medicine residency programs a national survey.* *J Gen Intern Med*, 2000. 15(2): p. 129-33.
3. PORTER, R., *The Greatest Benefit to Mankind - A medical History of Humanity.* 1997, London: HarperCollins. 931.
4. WILKINSON, L., *Epidemiology*, in *Companion Encyclopedia of the History of Medicine*, W.F. Bynum and R. Porter, Editors. 1997, Routledge: London. p. 1262 - 1372.
5. PAUL, J. R., *Presidential Adress - Clinical Epidemiology.* *Journal of Clinical Investigation*, 1938. 17: p. 539 - 541.

6. PAUL, J. R., *Clinical Epidemiology*. Second ed. 1966, Chicago: The University of Chicago Press.
7. FLETCHER, R. H., *Alvan Feinstein, the Father fo Clinical Epidemiology, 1925 - 2001*. *Journal of Clinical Epidemiology*, 2001. 53(12): p. 1188 -1190.
8. FEINSTEIN, A. R., *Clinometrics*. 1987, New Haven: Yale University Press.
9. FEINSTEIN, A. R., *Clinical Epidemiology I- The Populational Experiments of Nature of Man in Human Illness*. *Annals of Internal Medicine*, 1968. 69(4): p. 807 - 820.
10. FEINSTEIN, A. R., *Clinical Epidemiology III- The Clinical Design of Statistics in Therapy*. *Annals of Internal Medicine*, 1968. 69(6): p. 1287 - 1312.
11. BURNHAM, J., *American Medicine's Golden Age: what happened to it?* *Science*, 1982. 215(4539): p. 6.